

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 26 • HEFT 5 • JULI 1936

Folienabbildung mit dem Immersionsobjektiv¹⁾

Von R. Behne

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

(Mit 8 Figuren)

Inhalt: Einleitung. — 1. Methodisches zur Folienabbildung mit Sekundärelektronen: a) Versuchsanordnung; b) Abbildung mit Primär- und Sekundärelektronen; c) Strukturbild bei Sekundärstrahlabbildung; d) Bildstörung durch Primärelektronen. — 2. Entstehung der Sekundärelektronen. — 3. Anwendung der Sekundärelektronenabbildung: a) Vergleich zwischen Licht- und Sekundärelektronenbild; b) Beobachtungen von Schmelzvorgängen. — Zusammenfassung.

Einleitung

Will man eine dünne Metallfolie mikroskopisch untersuchen, so hat man zwei Möglichkeiten dazu: Abbildung in auffallender und Abbildung in durchfallender Strahlung.

Der Anwendung des Elektronenmikroskopes zu dem gleichen Zweck scheint eine praktische Schwierigkeit gegenüberzustehen. Eine ursprünglich monochromatische Elektronenstrahlung, die wir für die Folienbestrahlung wählen, bleibt nicht erhalten. Während es aber in der Lichtoptik achromatische Systeme gibt, sind in der Elektronenoptik keine Achromaten bekannt.

Bei einer Analyse der von der Folie ausgehenden Strahlung nach Beschießung mit monochromatischen Elektronen stellen wir folgendes fest: Ein Teil wird unverändert reflektiert, ein anderer Teil erleidet Geschwindigkeitsverluste verschiedener Höhe, und schließlich tritt eine langsame Sekundärstrahlung entsprechend der Fluoreszenz eines von Licht getroffenen Körpers auf. Das gilt für die Vorderseite wie für die Rückseite der Folie. Wie sich dabei an der Vorder- und Rückseite die Mengen verteilen, die auf die einzelnen Gruppen entfallen, hängt von dem Folienmaterial, der Foliendicke und der Elektronengeschwindigkeit ab.

Besäßen wir einen geeigneten elektronenoptischen Achromaten, so würden wir die Abbildung der Folie mit allen diesen verschiedenen schnellen Elektronen vornehmen. Einen solchen Achromaten herzustellen, dürfte jedoch kaum jemals gelingen, da es sich hier um

1) Dissertation der Technischen Hochschule Berlin.

den weiten Geschwindigkeitsbereich von Null bis zu voller primärer Strahlgeschwindigkeit handelt. Glücklicherweise ist das Abbildungsproblem trotzdem nicht hoffnungslos, da die von der Folie ausgehenden Elektronen in zwei selektive Gruppen zerfallen. Diese Gruppen werden von Elektronen der Geschwindigkeit „Null“ (Sekundärelektronen) und der vollen Geschwindigkeit (ungebremste Primärelektronen) gebildet. In dem Mittelgebiet sind die Elektronen mit geringer Intensität auf die verschiedenen Geschwindigkeiten relativ gleichmäßig verteilt. Infolge dieser Verhältnisse gelingt die Abbildung der Folie mit den beiden Grenzgruppen der Elektronen.

Für die Abbildung ergeben sich damit vier Möglichkeiten:

- I. Abbildung der Vorderseite mit schnellen reflektierten Elektronen.
- II. Abbildung von der Rückseite aus mit schnellen durchgegangenen Elektronen.
- III. Abbildung der Vorderseite mit langsamen sekundären Elektronen.
- IV. Abbildung von der Rückseite aus mit langsamen sekundären Elektronen.

Von diesen vier Möglichkeiten sind die ersten zwei besonders durch Ruska sowie durch von Borries und Ruska untersucht worden¹⁾. Die Abbildbarkeit der Vorderseite einer Folie (stets von der Kathode aus gesehen) mit Sekundärelektronen (Gruppe III) hat Zworykin²⁾ gezeigt, während die Rückseite einer Folie auf diese Weise noch nicht abgebildet wurde. Bei den Untersuchungen der vorhergehenden Arbeit³⁾ in diesem Band, die die Abbildung mit schnellen Elektronen zum Gegenstand hatten, ergab sich nun in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von A. Becker⁴⁾, daß bei der Durchstrahlung einer Folie auf der Austrittsseite sehr viele Sekundärelektronen ausgelöst werden. Da diese Elektronen eine enge Geschwindigkeitsverteilung haben, erlauben sie Abbildungen genügender Intensität zu erzielen.

1. Methodisches zur Folienabbildung mit Sekundärelektronen

a) Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung (Fig. 1) ist im wesentlichen dieselbe wie sie schon früher³⁾ beschrieben wurde. Die Folie *F* ist auf eine

1) Gruppe I: E. Ruska, Ztschr. Phys. **83**, S. 492. 1933; Gruppe II: B. Borries u. E. Ruska, Ztschr. Phys. **83**, S. 187. 1933; E. Ruska, Ann. de Phys. **87**, S. 580. 1934.

2) V. K. Zworykin, J. Frankl. Inst. **215**, S. 535. 1933.

3) R. Behne, Ann. d. Phys. [5] **26**, S. 372. 1936.

4) A. Becker, Ann. de Phys. **84**, S. 779. 1927.

Lochblende von 2 mm Durchmesser gespannt. Sie ist geerdet und als Bezugspunkt für alle unsere Potentiale gewählt. Die Plan-kathode K ist der Folie gegenüber negativ auf die Spannung U_K aufgeladen. Zwischen K und F erlangen also die Elektronen die gewünschte Energie E . Die Blenden B_1 und B_2 bilden zusammen mit F das Immersionsobjektiv, das zur Abbildung dient. Die Blenden haben gegen die Folie die jeweils zur Abbildung notwendigen Spannungen U_G und U_A . Die Isolation zwischen den Blenden muß besonders sorgfältig durchgeführt werden, da für U_A Spannungen bis zu 12 kV verwendet werden. Mit der Blende B_2 ist ein Schutzzyylinder Z verbunden, der störende Streuelektronen vom Leuchtschirm fern hält. Die Entfernung der Folie vom Schirm beträgt 750 mm. Die Apparatur wurde bei ständig laufender Pumpe betrieben.

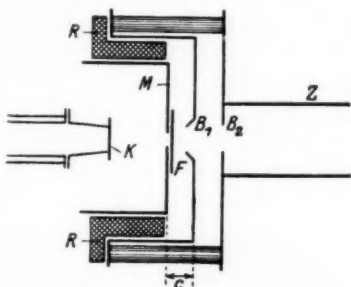


Fig. 1. Versuchsanordnung

b) Abbildung mit Primär- und Sekundärelektronen

Um die Wirkungsweise der Apparatur kennenzulernen, bilden wir eine handelsübliche Aluminiumfolie von $0,6 \mu$ Dicke ab. Nachdem gutes Hochvakuum erreicht ist, legen wir an die Kathode z. B. $U_K = 3 \text{ kV}$ gegen die Folie und die gleiche Spannung an B_2 . Wir stellen fest, daß die Elektronengeschwindigkeit noch nicht ausreicht, um die Folie merklich zu durchdringen. Nur durch die in der Folie vorhandenen Löcher gelangen Elektronen, was wir an einigen verwaschenen Flecken auf dem Leuchtschirm erkennen. Um die Löcher scharf abzubilden, variieren wir die Gitterspannung zwischen Null und $\pm 3000 \text{ Volt}$, während wir U_A konstant halten. Wir finden zwei Spannungen U_G , für die ein Bild auftritt, und zwar $U_{G_1} = -3940 \text{ Volt}$ und $U_{G_2} = +296 \text{ Volt}$. Die Vergrößerungen sind dabei verschieden, und zwar $V_1 = 130$ und $V_2 = 55$. Gehen wir mit den Werten von U_G , V_1 und V_2 in die Kurven von Fig. 3 und 6 der vorhergehenden Arbeit I dieses Heftes ein, die die Gitterspannung und die Vergrößerung in Abhängigkeit von der Ausgangsgeschwindigkeit E wiedergeben, so erhalten wir folgendes: Bei dem ersten Bild handelt es sich um Elektronen von $E_1 = 3000 \text{ V}$ Geschwindigkeit, die von der Folie ausgehen; bei dem zweiten Bild um Elektronen von $E_2 \approx 0 \text{ Volt}$ Ausgangsgeschwindigkeit. Das Bild

ist demnach hervorgerufen im ersten Fall durch Primärelektronen, die die Löcher frei passiert haben, im zweiten Fall durch sekundäre Elektronen, die an den Lochrändern herausgeschlagen sind.

Um diese zweifache Abbildungsmöglichkeit der Folie noch genauer kennenzulernen, erniedrigen wir U_K auf 200 Volt. Während bei $U_K = 3000$ Volt der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Elektronengruppen, die die Bilder erzeugen, sehr groß, und damit auch der Unterschied der Felder des Immersionsobjektivs für die Bilderzeugung in beiden Fällen sehr verschieden ist, ist bei $U_K = 200$ Volt nur eine relativ geringe Umstellung erforderlich.

Fig. 2a zeigt das Primärelektronenbild der Folienlöcher. Die Sekundärelektronen erreichen den Schirm nicht, da sie durch den Potentialberg, der in der vorhergehenden Arbeit dieses Heftes er-

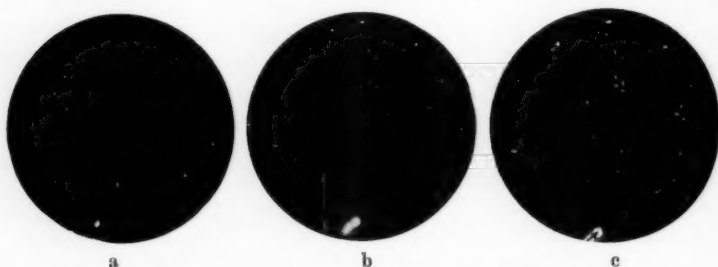


Fig. 2. Abbildung der Löcher in einer Folie mit a) Primärelektronen und b) Sekundärelektronen (Durchstrahlgeschwindigkeit 200 Volt)

$$V_a = 45, V_b = 33$$

wähnt wird, zurückgehalten werden. Fig. 2b gibt das Sekundärelektronenbild mit dem überlagerten unscharfen „Primärbild“ wieder. Bei 2c ist dieselbe Aufnahme nochmals wiedergegeben. Dazu sind Verbindungsstriche zwischen den Bildpunkten S der Sekundärstrahlabbildung und den Flecken P des unscharfen Bildes der Primärelektronen eingetragen. Der Pfeil weist jeweils auf die unscharfe Abbildung mit Primärelektronen. Wir entnehmen den Bildern, daß erstens jedem Punkt S ein Fleck P zuzuordnen ist, daß zweitens die Verbindungslinien $S-P$ auf ein Zentrum¹⁾ zulaufen, von dem die S -Punkte stets weiter entfernt sind als die P -Flecken entsprechend einer geringeren „Vergrößerung“ des P -„Bildes“. Beide Feststellungen entsprechen unseren Erwartungen.

1) Nicht genau in der Mitte des Bildfeldes, was durch die magnetischen Störfelder erklärt werden kann.

c) Strukturbild bei Sekundärstrahlabbildung

Ausgehend von dem soeben beschriebenen Versuch mit Elektronen von 200 Volt Geschwindigkeit wollen wir nun zu höheren Primärgeschwindigkeiten übergehen. Dabei interessieren wir uns für zwei Fragen, nämlich erstens für das Verschwinden des bei Sekundärstrahlabbildung störenden „Bildes“ der Primärelektronen und zweitens für das Auftauchen des Strukturbildes der Folie. Da die Geschwindigkeit der Sekundärelektronen unabhängig von der Primärgeschwindigkeit nahezu Null ist, bleibt die Einstellung des Immersionsobjektivs für die Abbildung mit Sekundärelektronen bei konstanten U_A erhalten. Mit der Erhöhung von U_K sinkt der Einfluß des Immersionsobjektivs auf die ungehindert durch die Löcher gehenden Primärelektronen natürlich immer mehr. Ergaben die

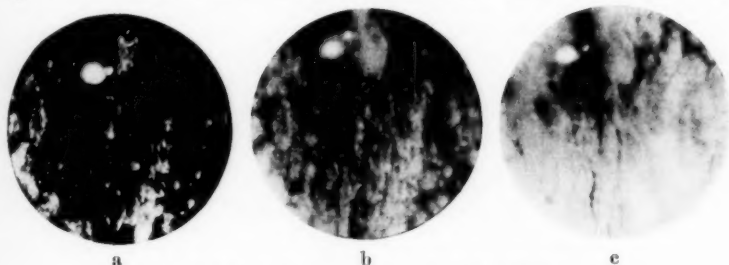


Fig. 3. Abbildung einer Al-Folie mit Sekundärelektronen,
a) 6 kV Primärgeschwindigkeit, b) 7 kV Primärgeschwindigkeit,
c) 9 kV Primärgeschwindigkeit. $V = 55$

nicht mehr ganz fokussierten Primärstrahlen bei kleinem U_K zunächst noch ein unscharfes „Bild“ auf dem Schirm, so werden die von den Primärelektronen herrührenden Leuchtflecke immer diffuser und wandern nach dem Zentrum hin, bis die Brechkraft des Objektivs schließlich nicht mehr ausreicht, um die Primärstrahlen noch merklich zu beeinflussen. Gleichzeitig wird das Bild der Sekundärstrahlung intensiver, und es tritt neben den Löchern allmählich die Struktur der Folie hervor (Fig. 3a). Bei weiterer Erhöhung der Durchstrahlspannung wird dieses Bild intensiver und zeigt schließlich bei z. B. 7 kV die ganze Folie in kontrastreicher Struktur (Fig. 3b)¹⁾.

Steigern wir die Kathodenspannung noch mehr, so wird das Bild zwar intensiver, dafür verschwindet aber mehr und mehr wieder die Struktur (Fig. 3c).

1) Über den auf allen Bildern sichtbaren hellen Fleck vgl. den nächsten Abschnitt.

Die Versuche zeigten, daß es zur Sichtbarmachung der Folienstruktur ein Optimum der Durchstrahlspannung gibt. Dieses Optimum liegt für unsere Aluminiumfolie zwischen 5 und 7 kV. In diesem Bereich sind die Bilder kontrastreich. Je nachdem ob man die Einzelheit einer dünneren oder dickeren Folienstelle genauer sehen will, wird man die niedrigere oder höhere Primärspannung wählen.

d) Bildstörung durch Primärelektronen

Sämtliche wiedergegebenen Abbildungen der Aluminiumfolie (Fig. 2 und 3) zeigten einen intensiven hellen Fleck auf der oberen Hälfte des Bildfeldes. Der Fleck ist unscharf und liegt bei den einzelnen Bildern an verschiedenen Stellen im Bildfeld, das stets nach dem Sekundärelektronenbild orientiert wiedergegeben worden

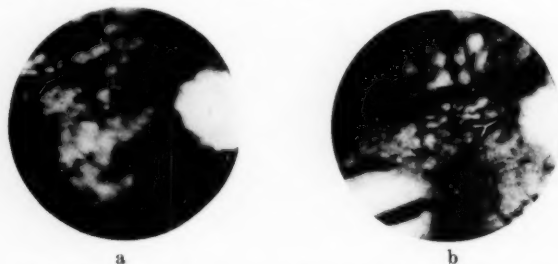


Fig. 4. Nachweis verschiedener Elektronengeschwindigkeiten durch magnetische Ablenkung (Bild verschiebt sich gegen Primärstrahlfleck.)

$V = 65$

war. Es liegt nahe, diesen Fleck als ein größeres Loch zu deuten, durch das ein kräftiges Bündel von Primärelektronen dringt. Um diese Vermutung zu prüfen, wurde folgender Versuch durchgeführt: Es wurde eine Folie eingebaut, in die mit einer Nadel ein feines Loch gestoßen war. Auf dem Schirm haben wir jetzt erstens den Durchstoßpunkt eines Bündels von Primärelektronen und zweitens ein Sekundärstrahlungsbild der Folie zu erwarten. Fig. 4a zeigt beides. Der Primärstrahlfleck ist rechts am Rande zu erkennen. Lenken wir nun das Leuchtschirmbild magnetisch ab¹⁾, so werden wir erwarten, daß sich die beiden Anteile des Leuchtschirmbildes gegeneinander verschieben. Fig. 4b, die nach dem Fleck der Primärstrahlen orientiert ist, zeigt, daß unsere Vermutung den Tatsachen entspricht.

Noch deutlicher werden diese Verhältnisse, wenn wir neben dem durchgegangenen Primärbündel gleichzeitig auch das Sekundär-

1) Ein bestimmter Teil der Folienstruktur ist besonders markiert.

bild des Lochrandes sehen und verfolgen können, daß sich dieses Sekundärbild gegenüber dem Strukturbild *nicht* verschiebt. Da sich hierzu ein großes Loch weniger eignet, ritzen wir mit einer Rasierklinge eine Folie ganz leicht an. Fig. 5 zeigt das elektronenoptische Durchstrahlungsbild dieser Folie in verschiedener magnetischer Ablenkung. In der Folienstruktur sehen wir die Abbildung des Schnittes durch Sekundärelektronen, die aus dem Schnitttrand stammen. An bestimmten Strukturmerkmalen können wir erkennen, daß sich Schnitt- und Strukturbild bei verschiedener magnetischer Ablenkung nicht gegeneinander verschieben. Auch liegt das Maximum hinsichtlich der Bildgüte bei genau denselben Blendenspannungen. Rechts unten sieht man außerdem das breite Band der durch den Schnitt gegangenen Primärelektronen, das sich gegenüber dem Strukturbild ganz merklich verschoben hat.

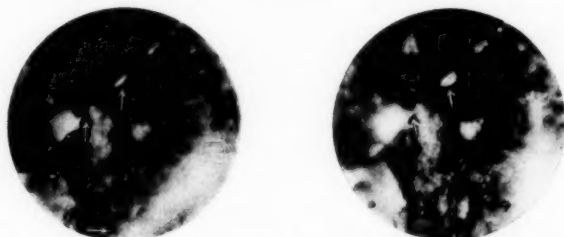


Fig. 5. Struktur und Schnitt einer Folie werden mit Sekundärelektronen abgebildet (Bild magnetisch abgelenkt.) $V = 49$

Aus den Intensitätsverhältnissen können wir sehen, daß die Primärelektronen, die durch die Folie gegangen sind, trotz ihrer hohen Geschwindigkeit keine Störungen des Bildes hervorrufen, da sie bei geeigneter Wahl der Linsenspannung nur eine allgemeine Schirmaufhellung bedingen, es sei denn, daß größere Löcher in der Folie vorhanden sind.

2. Entstehung der Sekundärelektronen

Die Ergebnisse der im vorigen Abschnitt beschriebenen Experimente lassen keinen Zweifel daran, daß die Folienabbildungen durch Sekundärelektronen erzeugt sind, die auf der Rückseite der durchstrahlten Folie ausgelöst werden. Im folgenden wollen wir näher darauf eingehen, wie die hierzu erforderliche kräftige Sekundärstrahlung zustande kommt, und welche Gesetzmäßigkeiten bei ihrer Entstehung gelten.

Wir kehren noch einmal zu den Aufnahmen der Fig. 4 zurück und erinnern uns an die Feststellung, daß bei einer bestimmten

Spannung das Strukturbild dieser Folie am aufschlußreichsten ist. Zur Deutung dieser Beobachtung denken wir uns an Stelle einer Folie konstanter Dicke und veränderter Strahlgeschwindigkeit eine Strahlung von konstanter Geschwindigkeit vorgegeben, während wir die Dicke der Folie ändern. Ist die Folie sehr dick, so wird die Primärstrahlung nicht bis zur Rückseite der Folie vorzudringen vermögen, vielmehr bereits vorher nach Geschwindigkeit und Menge praktisch auf Null reduziert sein. Es werden daher auch keine Sekundärelektronen aus der Rückseite austreten können. Verringern wir die Foliendicke, so werden von einer gewissen „Grenzdicke“ ab Primärelektronen in merklichem Maße die Folie wieder verlassen können. „Grenzdicke“ ist in diesem Sinne also in Übereinstimmung mit der Lenardschen Definition¹⁾ „diejenige Schichtdicke, welche die gegebene Strahlgeschwindigkeit bei Normallauf und bei den maximal auftretenden Geschwindigkeitsverlusten zu Null reduziert“.

Gleichzeitig mit den Primärelektronen beginnen auch Sekundärelektronen aus der Folie auszutreten, und zwar erhalten wir nach den Messungen Beckers²⁾ eine sehr intensive Sekundärstrahlung, wie es die folgende Tabelle zeigt³⁾:

Primärgeschwindigkeit in Volt	Primär in %	Sekundär in %
4300	31	69
3000	22	78
2100	10,5	89,5
1500	5,6	94,4
1100	2,6	97,4
900	1,8	98,2
650	1,4	98,6

Die Tabelle zeigt uns folgendes: Beschießen wir die Folie mit Elektronen einer Geschwindigkeit, die gerade ausreicht, um die Folie noch zu durchdringen, also z. B. in diesem Falle Elektronen von 650 Volt, so ist die aus der Folie austretende Strahlung praktisch reine Sekundärstrahlung. Die Geschwindigkeit der Primärelektronen wird nämlich beim Durchgang durch die Folie in deren ersten Schichten relativ wenig reduziert, während sie in der letzten Schicht vor Erreichung der Grenzdicke stark abgebremst wird und damit diejenigen Geschwindigkeiten (in der Größenordnung von 100 Volt) durchläuft, für die die Ausbeute der Sekundärstrahlung ein Maximum

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen S. 63.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. **84**, S. 778. 1927.

3) Nickelfolie 0,04 μ ; Grenzdicke läßt sich nicht genau angeben, liegt bei etwa 400 Volt.

wird. Folien, die dünner sind als die Grenzdicke, werden also ohne großen Geschwindigkeitsverlust durchsetzt, während in der dickeren Folie die Strahlung vollständig absorbiert wird. Diese Empfindlichkeit gegenüber geringen Dickenunterschieden bedingt die kontrastreiche Abbildung in dem Übergangsgebiet.

Die bei den Figg. 3 und 4 benutzte Folie war aus Aluminium und hatte, wie durch Wägung bestimmt worden war, eine mittlere Dicke von $0,6 \mu$. Der optimale Bereich der Primärstrahlung, in dem sich die Struktur am besten zeigte, war 5—7 kV, die Grenzdicke für die Geschwindigkeit von 6 kV beträgt nach Lenard und Becker¹⁾ etwa $0,7 \mu$. Sie stimmt mit der Dicke unserer Folie überein. Entsprechendes findet man, wenn man Folien aus anderem Material und von anderer Dicke benutzt. Bei einer Goldfolie von $0,1 \mu$ Dicke ergibt sich eine kontrastreiche Abbildung bei 4,5 kV. Dieser Strahlenenergie entspricht unter Voraussetzung des Massenproportionalitätsgesetzes²⁾ eine Grenzdicke von $0,08 \mu$. Es ergibt sich also größenordnungsmäßig der erwartete Wert.

Um die Dickenabhängigkeit zu prüfen, legen wir zwei Folien von $0,1 \mu$ übereinander. Jetzt ergibt sich ein Bild bei 7,0 kV. Dieser Wert entspricht dem Gesetz, daß die Grenzdicke dem Quadrat der Elektronenenergie proportional ist. Setzen wir nämlich für die Grenzdicke den doppelten Wert entsprechend der doppelten Foliendicke ein, so haben wir das $\sqrt{2}$ fache der für die einfache Folie erforderlichen Elektronenenergie zu erwarten, also $\sqrt{2}$ mal $4,5 = 6,4$ kV.

Als letzte Frage betrachten wir die Verteilung der Sekundärelektronen. Ihre wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist nach Beckers Messungen³⁾ auf 2 Volt abgeschätzt worden. Auch aus den elektrischen Daten kann man ja eine Geschwindigkeitsabschätzung vornehmen (vgl. Abschnitt Ic und I). Einen weiteren Anhaltspunkt bietet die Bildschärfe. Kennen wir nämlich außer den Spannungsdaten und der Vergrößerung auch noch den Abstand zweier Bildpunkte, die sich noch mit Sicherheit trennen lassen, so läßt sich nach einer Formel von Henneberg und Recknagel⁴⁾ auf die Strahlgeschwindigkeit schließen. Setzen wir d = Durchmesser des Zerstreungs

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen S. 72; Wien-Harms, Handb. d. Exp. Phys. Bd. XIV/2. S. 135.

2) Dabei erhält man jedoch eine zu geringe Grenzdicke entsprechend der Erfahrung, daß die Absorption für Elektronenstrahlen geringer ist als es der Massenproportionalität entspricht.

3) A. Becker, Ann. d. Phys. 84. S. 779. 1927.

4) W. Henneberg u. A. Recknagel, Ztschr. f. techn. Phys. 16. S. 230. 1935.

kreises¹⁾ auf dem Bilde, E = Anfangsenergie der Elektronen, U = Endgeschwindigkeit und L = Mikroskoplänge, dann ist

$$A = \frac{2V}{2V+1} \cdot L \cdot \frac{E}{U}.$$

Dabei ist bei höheren Vergrößerungen $\frac{2V}{2V+1} \approx 1$. Der Ausdruck ist allerdings unter der Annahme abgeleitet worden, daß das Abbildungssystem aus einem Beschleunigungsfeld mit anschließender dünner Linse besteht, so daß die daraus zu berechnende Geschwindigkeit E nur eine erste Näherung darstellt. In unserem Falle ergibt sich mit $A = 0,5$ mm, $U = 3000$ Volt, $L = 750$ mm die Geschwindigkeit $E \sim 2$ Volt. Das Ergebnis entspricht den Werten, die wir aus der Vergrößerung und den Spannungsverhältnissen schon früher bestimmt haben, und dem Wert, den Becker bei der Durchstrahlung dünner Folien mittels Gegenspannung ermittelte.

3. Anwendung der Sekundärelektronenabbildung

a) Vergleich zwischen Licht- und Sekundärelektronenbild

Beginnen wir die Beispiele für die Anwendung dieser Abbildungsmethode mit einem Vergleich von Licht- und Elektronenbild. Da das Elektronenbild die innere Struktur der Folie gibt, müssen wir es mit dem Durchstrahlungsbild eines Lichtmikroskops vergleichen. Unsere in dieser Arbeit verwendete Aluminiumfolie von $0,6 \mu$ Dicke, die für Elektronen noch gut durchlässig ist, ist für den Vergleich wegen ihrer starken Lichtabsorption jedoch nicht mehr geeignet. Wir wählen daher eine Goldfolie von $0,1 \mu$, die sich als gut lichtdurchlässig erweist. Fig. 6 zeigt Licht- und Elektronenbild nebeneinander. Auf den Bildern sind gleiche Strukturen leicht zu erkennen. Man achte z. B. auf die dreibeinähnliche Figur im oberen Bildteil, und auf die gekrümmte dunkle Linie weiter unten. Daß auf den Elektronenbildern ein Teil der Folie unscharf erscheint, liegt an ihrer Verwerfung, die bedingte, daß auf verschiedene Gegenstandsebenen scharf eingestellt werden mußte.

Allgemein ist an den Bildern der Fig. 6 noch bemerkenswert, daß die Abbildungen auf der linken Seite dunkel sind. Die Ursache ist, daß die linke Seite von einer unregelmäßig abgerissenen Folie zugedeckt ist. Ursprünglich waren zwei Folien übereinander gelegt. Die dem Immersionsobjektiv zugekehrte Folie war im Laufe der

1) Der Zerstreuungskreis ist der Kreis in der Bildebene, den die von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Elektronen mit einer Anfangsenergie $\leq E$ ausfüllen.

Versuche durch die Wärmeeinwirkung zum großen Teil zerstört worden, so daß das Gesichtsfeld nur noch zu $\frac{1}{4}$ von der doppelten Folie bedeckt war, während $\frac{3}{4}$ des Gesichtsfeldes nur die einfache Folie zeigten. Daß der der Glühkathode fernere Teil der Folie



Fig. 6. Vergleich zwischen Licht- und Sekundärelektronenbild ($0,1 \mu$ Au-Folie)
a) Lichtbild, b) und c) Sekundärelektronenbilder (auf verschiedene Bereiche
scharf eingestellt). $V = 65$

zuerst durchbrannte, ist ein Beweis für die Erwärmung durch Elektronenabsorption in der letzten Schicht.

In Fig. 6 ist die Spannung an der Kathode so eingestellt ($4,5 \text{ kV}$), daß nur die einfache Folie kontrastreich abgebildet wird. Der Bereich der doppelten Folie bleibt dabei dunkel. Erhöhen wir die Spannung so weit, und zwar auf 7 kV , daß die Struktur der Doppel- folie sichtbar wird, so erhalten wir die Abbildung von Fig. 7. Es ergibt sich hier ein Bild der Dickenstruktur beider Folien. An der Grenze zwischen beiden Bereichen fällt ein heller Streifen auf, der von den am Folienrand in größerer Zahl ausgelösten Sekundärelektronen herrührt.

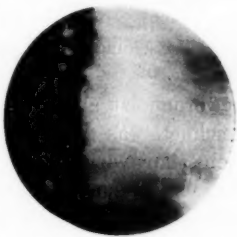


Fig. 7.
Struktur einer doppelten
Au-Folie ($0,1 \mu$). $V = 60$

b) Beobachtungen von Schmelzvorgängen

Durch die bereits mehrfach erwähnte Wärmeeinwirkung des Elektronenbombardements wurde die eingespannte Folie bei langer Betriebsdauer so stark erhitzt, daß sie schließlich zu schmelzen anfang. Es gelang, den Schmelzvorgang mit den ausgelösten Sekundärelektronen abzubilden. Drei Ausschnitte aus diesem Vorgang zeigt die nächste Bildreihe (Fig. 8). Auf dem ersten Bild sehen wir den Beginn des Schmelzens. Wir bemerken hier, daß die Verflüssigung des Metalles in mehreren Phasen nach dem Rande zu fortschreitet.

bis die Folie vollkommen durchgeschmolzen ist. Der ganze Prozeß spielte sich so schnell ab, daß die Kathodenheizung nach der ersten Aufnahme ausgeschaltet wurde, damit sich die Folie abkühlen konnte und Zeit für eine weitere Aufnahme gewonnen wurde. Das zweite Bild zeigt die erstarrte Schmelze. Es ist hier eine neue Struktur deutlich sichtbar. Im übrigen sehen wir hier in der Mitte schon eine vollkommen durchgeschmolzene Stelle. Der hier durchgegangene Primärstrahl beeinträchtigt natürlich die Bildgüte in der Mitte etwas. Man sieht hier sowohl die Struktur des Schmelzbereiches als auch die der noch nicht angegriffenen Folie. Dies ist ein Zeichen dafür, daß sehr wesentliche Unterschiede in der Emission nicht bestehen. Der angegriffene Bereich erscheint insgesamt zwar etwas heller, das liegt aber daran, daß er durch den Schmelzvorgang etwas dünner

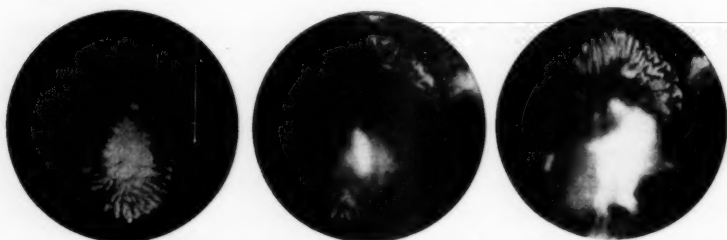


Fig. 8. Sekundärelektronenbilder vom Schmelzvorgang einer Folie. $V = 60$

geworden ist als die Umgebung. Er ist außerordentlich scharf gezeichnet, was darauf schließen läßt, daß beim Erstarren der Schmelze sich scharf voneinander getrennte Dickenbereiche herausgebildet haben. Zwischen dem zweiten und dem dritten Bild wurde der Folie wieder Zeit zur Abkühlung gelassen. Auf dem dritten Bild ist in der Mitte schon ein sehr großer Bereich weggeschmolzen, so daß ein Teil des Bildes durch die Primärelektronen erheblich gestört wird. Die Struktur hat sich in ihren Feinheiten geändert, wenn auch die groben Umrisse erhalten geblieben sind.

Es muß noch eine Erscheinung beim Beginn des Schmelzprozesses erwähnt werden. Wir sehen auf dem ersten Bild lediglich die Schmelzstelle abgebildet, ganz im Gegensatz zu den beiden anderen Bildern jedoch nichts von der Struktur der übrigen Folie. Beim Beginn des Durchschmelzens hat die Intensität an der Schmelzstelle außerordentlich stark zugenommen (um ein mehrfaches der ursprünglichen Intensität). Das kann man nicht nur mit dem Dünnerwerden der entsprechenden Stelle erklären, denn nach dem Erkalten ist der Helligkeitsunterschied wesentlich geringer und entspricht dem Dicken-

verhältnis. Es wird sich also um eine thermische Abhängigkeit der Elektronenemission aus der Folie handeln. Unzweifelhaft sind es Elektronen, die die Folie mit geringer Geschwindigkeit verlassen, denn die Spannungsverhältnisse am Immersionsobjektiv entsprechen durchaus denen für die üblichen Sekundärabbildungen. Wahrscheinlich rührt die erhöhte Intensität von einer Glühemission beim Schmelzen des Metalles her.

Zusammenfassung

1. Es wird gefunden, daß die Abbildung einer Metallfolie mit Sekundärelektronen möglich ist, die an der Folienrückseite bei der Durchstrahlung mit Primärelektronen ausgelöst werden.

2. Entstehung und Eigenschaften der Sekundärstrahlung und die zu einer Abbildung günstigsten Bedingungen werden im Zusammenhange mit Lenards Gesetzmäßigkeiten der Grenzdicke diskutiert.

3. Die Deutung des Auftretens einer intensiven Sekundärstrahlung wird durch Experimente mit Folien verschiedenen Materials und verschiedener Dicke belegt.

4. Durch Versuche mit verschiedenen Strahlgeschwindigkeiten und Vergleich mit dem Lichtbild wird nachgewiesen, daß im wesentlichen die Dickenstruktur der Folie abgebildet wird.

5. Es werden Schmelzvorgänge an Aluminiumfolien durch Abbildung mit Sekundärelektronen beobachtet.

Vorliegende Arbeit wurde 1935 im Rahmen einer Dissertation im Physikalischen Laboratorium des AEG-Forschungsinstituts durchgeführt.

Berlin-Reinickendorf, im Februar 1936.

(Eingegangen 19. Februar 1936)

Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie¹⁾

Von Hans Euler

(Mit 3 Figuren)

Inhalt: Einleitung. — I. Teil: § 1. Vorläufige Angabe eines anschaulichen Ausdrucks für die Wechselwirkung \bar{U}_1 von Licht mit Licht, welche zum Übergang zweier Lichtquanten g_1, g_2 in zwei andere $-g_3, -g_4$ führt:

$$(g_1 g_2 | \bar{U}_1 | -g_3 -g_4) = H_{in}^4);$$

§ 2. Nähere Bestimmung der Wechselwirkung \bar{U}_1 von Licht mit Licht aus der Invarianz der dazugehörigen korrigierten Maxwell'schen Gleichungen:

$$\left(\bar{U}_1 = \frac{\hbar c}{c^2} \frac{1}{E_0^2} \int [\alpha (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2)^2 + \beta (\mathfrak{B} \mathfrak{D})^2] dV \right);$$

§ 3. Diskussion der Vertauschungsrelationen für die Feldstärken im System der korrigierten Maxwellgleichungen. — II. Teil: § 4. Allgemeines Störungsschema, das zur Berechnung der Streuung von Licht an Licht verwandt wird; § 5. Aufstellung der Matrix H_{in}^4 der Diracschen Theorie für Streuung von Licht an Licht; § 6. Entwicklung nullter Ordnung dieser Matrix H_{in}^4 nach Lichtfrequenzen und Vergleich mit dem Heisenbergschen Subtraktionsglied; § 7. Nachweis der Identität der aus der Diracschen Theorie folgenden Matrix H_{in}^4 mit der oben aufgestellten Wechselwirkungsenergie \bar{U}_1 der Lichtquanten. — III. Teil: § 8. Ausrechnung des Matrixelements für Streuung von Licht an Licht (im Glied 4. Ordnung der Entwicklung nach Lichtfrequenzen) für zwei Spezialfälle zur Bestimmung der Zahlenkoeffizienten α, β in der Wechselwirkung von Licht mit Licht. $\left(\alpha = -\frac{1}{360\pi^2}, \beta = -\frac{7}{360\pi^2} \right)$; § 9. Bestätigung des Verfahrens; § 10. Diskussion des Resultats.

Einleitung

Halpern²⁾ und Debye³⁾ haben bemerkt, daß man nach der Diracschen Theorie eine *Streuung von Licht an Licht* erwarten muß.

1) Dissertation der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig. Die vorliegende Arbeit ist die nähere Ausführung zu einer Notiz von Euler und Kockel in den „Naturwissenschaften“. 23. S. 246. 1935. Teil II und III wurde gemeinsam mit Herrn Kockel, § 5 vorwiegend von Herrn Kockel ausgeführt.

2) O. Halpern, Phys. Rev. 44. S. 885. 1934.

3) P. Debye, in einer mündlichen Diskussion mit Herrn Prof. Heisenberg.

Denn zwei Lichtquanten können ein Paar, ein Positron und ein Elektron, erzeugen und dieses Paar kann sofort wieder zerstrahlen; zwei Lichtquanten können sich also spontan in zwei andere Lichtquanten verwandeln (unter Erhaltung von Energie- und Impulssumme).

Bei diesem Prozeß muß man zwei Fälle unterscheiden:

Entweder die Energien cg^1 und cg^2 der beiden Lichtquanten und der Winkel zwischen ihren Impulsen g^1, g^2 sind so groß, daß Energie und Impulssatz die Erzeugung eines *wirklichen* Paares erlauben ($g^1 g^2 - (g^1 g^2) > 2(mc)^2$). Dann erhält man die Wahrscheinlichkeit der Streuung der Lichtquanten aneinander, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Paarerzeugung und der Wiederzerstrahlung multipliziert und über alle Möglichkeiten summiert. Dies ist von Breit und Wheeler¹⁾ durchgeführt worden.

Oder aber Energie und Impuls zweier Lichtquanten reichen nicht zur Erzeugung eines wirklichen Paares aus

$$(0,1) \quad \left(\begin{array}{l} g^1 g^2 - (g^1 g^2) < 2(mc)^2, \\ \text{d. h. in geeignetem Bezugssystem: } g^1 < mc, g^2 < mc \end{array} \right).$$

Dann können die Lichtquanten g^1, g^2 doch durch die *virtuelle* Möglichkeit der Paarerzeugung in zwei andere Lichtquanten übergehen und auch in diesem Fall (etwa des sichtbaren Lichts) muß es eine Streuung von Licht an Licht geben. Ihr Wirkungsquerschnitt soll hier berechnet werden. (§ 10, Formel 9 und 10).

I. Teil

Die Wahrscheinlichkeit des Übergangs zweier Lichtquanten g_1, g_2 in zwei andere $-g_3, -g_4$ wird gegeben durch das Quadrat eines Matricelements H_{in}^4 der Diracschen Theorie (welches, wie sich später zeigen wird, von 4. Ordnung in der Elektronenladung ist).

Die direkte Ausrechnung dieser Matrix H_{in}^4 der Diracschen Theorie (Teil II, III), [d. h. der Matricelemente, für den *allgemeinen* Fall beliebiger Streu- und Polarisationsrichtungen] würde sehr mühsam sein. Sie kann jedoch auf das einfachere Problem der Berechnung zweier Matricelemente [d. h. der Berechnung von H_{in}^4 für zwei *spezielle* Streu- und Polarisationsrichtungen] zurückgeführt werden durch die folgenden allgemeinen Betrachtungen (Teil I).

1) G. Breit u. J. Wheeler, Phys. Rev. **46**. S. 1087. 1934.

- § 1. **Vorläufige Angabe eines anschaulichen Ausdrucks für die Wechselwirkung \bar{U}_1 von Licht mit Licht, welche zum Übergang zweier Lichtquanten g_1, g_2 in zwei andere $-g_3, -g_4$ führt.**

$$(g_1 g_2 | U_1 | -g_3 -g_4) = H_{in}^4.$$

Wenn zwei Lichtwellen sich aneinander streuen, statt sich ungestört zu überlagern, so bedeutet das eine Abweichung vom Superpositionsprinzip. Das optische Superpositionsprinzip wird durch die Linearität der Maxwell'schen Gleichungen des Vakuums zum Ausdruck gebracht. Die Streuung von Licht an Licht wird also durch einen nichtlinearen Zusatz zu den Maxwell'schen Vakuumgleichungen beschrieben werden können, falls eine anschauliche Beschreibung möglich ist. Diese anschauliche Beschreibung, deren Möglichkeit wir später (§ 7) nachweisen, wird durch die folgende Analogie nahegelegt, welche in der Diracschen Theorie zwischen Lichtquanten und Elektronen besteht:

Zwei Elektronen können Lichtquanten erzeugen und dadurch in gegenseitige Wechselwirkung treten, die sich etwa in der Streuung der Elektronen aneinander äußert und für die es in gewisser Näherung einen anschaulichen Ausdruck, das Coulombsche Gesetz gibt.

Ebenso erzeugen zwei Lichtquanten virtuell eine Menge von Paaren und dadurch entsteht zwischen ihnen eine Wechselwirkung, die zur Streuung von Licht an Licht führt. Auch für diese Wechselwirkung der Lichtquanten miteinander sollte man einen dem Coulombschen Gesetz analogen, einfachen, anschaulichen Ausdruck erwarten.

Die Coulombsche Wechselwirkung in einem Materiefeld, das durch einen Dichteoperator $\psi^* \psi$ beschrieben wird, ist

$$(1,1) \quad \bar{U} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{\psi^*(\xi) \psi(\xi) \psi^*(\xi') \psi(\xi')}{(\xi - \xi')} dV dV'$$

Den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons an einem Elektron erhält man aus dem Quadrat des Matrixelements von (1,1) für einen Übergang im Materiefeld, der die Streuung zweier Elektronen aneinander bedeutet.

Um eine zu (1,1) analoge Wechselwirkung der Lichtquanten zu finden, muß man eine Funktion \bar{U}_1 der Freiheitsgrade des Strahlungsfeldes, also der Feldstärken F_{ik} suchen, deren Matrixelement für einen Übergang im Strahlungsfeld, welcher die Streuung zweier Lichtquanten aneinander bedeutet, gleich dem oben besprochenen und später zu berechnenden Matrixelement H_{in}^4 der Diracschen Theorie für diesen Prozeß ist.

Über diese Wechselwirkung \bar{U}_1 der Lichtquanten als Funktion der Feldstärken läßt sich folgendes aussagen:

Da sie zu Prozessen führen soll, in denen zwei Lichtquanten vergehen und zwei entstehen, muß sie die Feldstärken oder ihre Ableitungen in der 4. Potenz enthalten:

$$\bar{U}_1 = \text{const} \int \left[FFFF + \text{const}' \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} FF + \dots \right] dV$$

(Indices von Tensoren und Vektoren sind hier und im folgenden weggelassen oder durch spezielle Indices repräsentiert, um ihre Verknüpfung zu einem Skalar noch offen zu halten).

Da die Wechselwirkung \bar{U}_1 die Dimension einer Energie haben, aber (als Glied 4. Ordnung der Diracschen Theorie) die Elektronenladung in der 4. Potenz enthalten soll (und da aus den 4 unversellen Einheiten e, m, c, h nur eine dimensionslose Zahl, die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante $\frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ gebildet werden kann), ist die Konstante bis auf einen numerischen Faktor bestimmt zu:

$$(1,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{const} = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \\ \text{mit } E_0 = \frac{e}{\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2} = \text{„Feldstärke am Rande des Elektrons“} \end{array} \right.$$

Aus demselben Grunde müssen die Glieder mit den Ableitungen der Feldstärken noch eine von der Elektronenladung unabhängige Länge, also die Comptonwellenlänge $\frac{h}{mc}$ als zusätzlichen Faktor enthalten.

Zunächst wundert man sich darüber, daß in der Vakuumelektrodynamik die Elektronenmasse vorkommen soll, während doch vorausgesetzt ist, daß nur Lichtquanten und gar keine Elektronen vorhanden sind. Obwohl aber die hier betrachteten Glieder nur Gültigkeit haben, solange keine wirklichen Paare erzeugt werden, kommen sie doch nur durch die virtuelle Möglichkeit der Paarerzeugung zustande und das äußert sich im Auftreten der Elektronenmasse.

Man erwartet also neben der Maxwellschen Energie der einzelnen Lichtquanten eine gegenseitige Wechselwirkung der Lichtquanten von der Form:

$$(1,3) \quad \bar{U}_1 = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \int \left[FFFF + \left(\frac{\hbar}{mc} \frac{\partial}{\partial x} F \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \frac{\partial}{\partial x} F \right) FF + \dots \right] dV.$$

Es wird später gezeigt werden, daß das oben besprochene Matrixelement H_{in}^4 , das aus der Diracschen Theorie folgt, auch wirklich

in das Matricelement eines solchen Ausdrucks (1,3) umgeformt werden kann.

Da wir uns auf weiches Licht ($|g| < mc$) also auf langsam veränderliche Felder ($|\frac{\hbar}{mc} \frac{\partial F}{\partial x}| < |F|$) beschränken wollen (0,1), können wir in (1,3) die Glieder mit den Ableitungen der Feldstärken fortlassen.

Wir nehmen also jetzt, vorbehaltlich des späteren Beweises (§ 7) an, daß die Streuung von weichem Licht an Licht durch eine (zur Maxwellschen) zusätzliche Energiedichte im Strahlungsfeld von der Form

$$(1,4) \quad U_1 = \frac{\hbar c}{c^2} \frac{1}{E_0^2} F F F F$$

beschrieben werden kann:

$$(1,5) \quad H_{in}^4 = \left(g_1 g_2 \left| \int U_1 dV \right| - g_3 - g_4 \right).$$

$$(F_{ik} \text{ Feldstärken, } V \text{ Volumen des Strahlungsraums, } E_0 = \frac{e}{\left(\frac{c^2}{mc^2}\right)^2},$$

$$\left. \begin{array}{l} g_1 g_2 \text{ Lichtquanten vor dem Stoß} \\ - g_3 - g_4 \text{ Lichtquanten nach dem Stoß} \\ (g_1 g_2 |0\rangle - g_3 - g_4) \text{ Matricelement des Operators } 0 \\ H_{in}^4 \text{ Matricelement der Diracschen Theorie} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{für} \\ \text{diesen} \\ \text{Übergang.} \end{array} \right.$$

§ 2. Nähere Bestimmung der Wechselwirkung \bar{U}_1 von Licht mit Licht aus der Invarianz der dazugehörigen korrigierten Maxwellschen Gleichungen

$$\left(\bar{U}_1 = \frac{\hbar c}{c^2} \frac{1}{E_0^2} \int [\alpha (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2)^2 + \beta (\mathfrak{B} \mathfrak{D})^2] dV \right)^1.$$

Die Gestalt dieser Wechselwirkung U_1 (1,4) von Licht mit Licht soll nun durch die Forderung der relativistischen Invarianz näher bestimmt werden.

In der allgemeinen Quantentheorie von Licht und Materie²⁾ genügt der Tensor der elektrischen Feldstärke und magnetischen Induktion, die hier mit \mathfrak{E} , \mathfrak{B} bezeichnet werden sollen, den Gleichungen:

$$(2,1) \quad \boxed{\frac{1}{c} \mathfrak{B} + \text{rot } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0},$$

1) Die mathematischen Beweise dieses Paragraphen sind identisch mit den von Born (M. Born, M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London. A. 143. S. 410. 1933; A. 144. S. 425. 1934; A. 147. S. 522. 1934) benutzten. Sie werden nochmal wiederholt, weil es sich hier um andere physikalische Voraussetzungen handelt. Vgl. auch S. 446.

2) W. Heisenberg u. W. Pauli, Ztschr. f. Phys. 56. S.1. 1930; 59. S.168. 1930.

welche mit der Existenz von Potentialen \mathfrak{A} gleich bedeutend sind:

$$(2,2) \quad \boxed{\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}},$$

und den Gleichungen

$$(2,3) \quad \boxed{-\frac{1}{c} \ddot{\mathfrak{A}} + \text{rot } \mathfrak{B} = \frac{4\pi i}{c}, \quad \text{div } \mathfrak{E} = 4\pi \varrho},$$

welche das Feld \mathfrak{E} , \mathfrak{B} mit der Materie der Dichte ϱ und der Strömung i verknüpfen. Die Materie ϱ , i ist ihrerseits wieder durch die Diracgleichung in ihrem Ablauf und ihrer Rückwirkung auf das Feld bestimmt.

Diese allgemeinen Zusammenhänge (2,1; 2,2; 2,3) bestehen vor wie nach der Löchertheorie.

Etwas neues entsteht durch die Löchertheorie aber beim Versuch der folgenden *Spezialisierung*.

Wenn keine Elektronen vorhanden sind, konnte man vor der *Löchertheorie* ϱ und i streichen und erhielt die Maxwellschen Gleichungen des Vakuums: (2,1) oder (2,2) und

$$(2,4) \quad -\frac{1}{c} \ddot{\mathfrak{A}} + \text{rot } \mathfrak{B} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0.$$

$$(2,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{In der Löchertheorie aber kommt, auch wenn keine} \\ \text{Elektronen vorhanden sind und auch wenn die Energie} \\ \text{des Strahlungsfeldes nicht ausreicht, um Elektronen und} \\ \text{Positronen zu erzeugen,} \end{array} \right.$$

doch, wie wir sahen, die virtuelle Möglichkeit zur Erzeugung von Materie im Verhalten des Feldes zum Ausdruck.

Die Gleichungen für diesen Spezialfall (2,5) müssen einerseits mit den allgemeinen Gleichungen (2,1; 2,2; 2,3) im Einklang sein, andererseits die Feldstärken allein enthalten; sie können also nur dadurch aus (2,1; 2,2; 2,3) hervorgehen, daß die Ströme ϱ , i durch gewisse Funktionen der Feldstärken \mathfrak{E} , \mathfrak{B} ersetzt werden, die man als „die vom Feld \mathfrak{E} , \mathfrak{B} virtuell erzeugte Materie“ bezeichnen kann.

D. h.: Für unseren Spezialfall (2,5) bleiben die Gleichungen (2,1; 2,2) bestehen, aber die Maxwellschen Vakuumgleichungen (2,4) sind durch gewisse Zusätze zu korrigieren, welche nur bei (gegen E_0) kleinen Feldern vernachlässigt werden dürfen.

Wir nehmen an, daß die abgeänderten Feldgleichungen durch eine *Hamiltonfunktion* \bar{U} und ihre kanonischen Gleichungen beschrieben werden können. Als *Koordinaten* des Systems können

wir (nach 2,2) das (negative) Vektorpotential $-\mathfrak{A}$ wählen. Die zu $-\mathfrak{A}$ kanonisch konjugierten Impulse sollen $\mathfrak{D}/4\pi c$ heißen, also durch

$$(2,6) \quad \mathfrak{D}_i(\xi) \mathfrak{A}_k(\xi') - \mathfrak{A}_k(\xi') \mathfrak{D}_i(\xi) = 2\hbar c i \delta(\xi - \xi') \delta_{ik}$$

oder

$$(2,7) \quad \boxed{\mathfrak{D}_i(\xi) \mathfrak{B}_k(\xi') - \mathfrak{B}_k(\xi') \mathfrak{D}_i(\xi) = 2\hbar c i \frac{\partial}{\partial \xi'_k} \delta(\xi - \xi')}$$

(mit zyklischen ikl) definiert sein.

Die Energie \bar{U} ist dann eine Funktion aller Koordinaten und Impulse,

$$(2,8) \quad \boxed{\bar{U} = \int U dV}$$

die allerdings nur die Feldstärken, nicht aber ihre Ableitungen enthalten soll:

$$(2,9) \quad U = U(\mathfrak{B}, \mathfrak{D}).$$

Die kanonischen Gleichungen zur Hamiltonfunktion \bar{U} werden nun:

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{B}}_k(\xi) &= \frac{i}{\hbar} \int [U(\mathfrak{B}(\xi), \mathfrak{D}(\xi)) \mathfrak{B}_k(\xi') - \mathfrak{B}_k(\xi') U(\mathfrak{B}(\xi), \mathfrak{D}(\xi))] d\xi \\ &= -4\pi c \operatorname{rot}_k \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{D}} \end{aligned}$$

oder mit (2,1):

$$(2,10) \quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi}}$$

und:

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{D}}_k(\xi) &= \frac{i}{\hbar} \int [U(\mathfrak{B}(\xi), \mathfrak{D}(\xi)) \mathfrak{D}_k(\xi') - \mathfrak{D}_k(\xi') U(\mathfrak{B}(\xi), \mathfrak{D}(\xi))] d\xi \\ &= 4\pi c \operatorname{rot}_k \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{B}} \end{aligned}$$

oder mit der Definition

$$(2,11) \quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}}$$

(2,12)

$$\boxed{-\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0}$$

was weiter

$$\boxed{\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0}$$

erlaubt.

Damit sind zu jeder Energie U die Feldgleichungen festgelegt: (2,1) und (2,12) gibt den zeitlichen Ablauf des Feldes, (2,10) und (2,11) verknüpft die Feldstärken $\mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ mit den Feldfunktionen $\mathfrak{D}, \mathfrak{S}$. Wie die Gl. (2,12) und (2,1) zeigen, bedeutet \mathfrak{D} die elektrische Verschiebung, \mathfrak{B} die magnetische Induktion und als solche die Kraft auf den wahren Strom¹⁾.

Das allgemeine Schema (2,1; 2,2; 2,12; 2,10; 2,11), das nur auf dem Induktionsgesetz (2,1) und der Abhängigkeit der Energie von den Feldstärken allein beruht, bekommt seinen Inhalt erst durch die Angabe einer bestimmten Hamiltonfunktion U .

Ist $U = \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{D}^2}{8\pi} = U_0$, so wird (2,10): $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ und (2,11) $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}$ und es gelten (2,12) die Gl. (2,4) des unkorrigierten Maxwell'schen Vakuumfeldes, die nur in erster Näherung für kleine Feldstärken richtig sind. In nächster Näherung lautet nach (1,4) die Hamiltonfunktion

$$(2,13) \quad U = \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{D}^2}{8\pi} + \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} f(\mathfrak{B} \mathfrak{D}) = U_0 + U_1$$

worin f eine Funktion 4. Grades in \mathfrak{B} und \mathfrak{D} ist.

Mit dem Relativitätsprinzip werden aber nur gewisse Zusätze f im Einklang sein. Wir bestimmen diese, indem wir zeigen, daß sich die Feldgleichungen (2,1; 2,2; 2,12; 2,10; 2,11) auch aus einem Variationsprinzip herleiten lassen, und verlangen, daß die Lagrange-funktion L , die in diesem Variationsprinzip zum Extrem gemacht wird, eine Lorentzinvariante ist.

Dazu definieren wir im Anschluß an ein allgemeines Verfahren der Mechanik die Funktion

(2,14)

$$\boxed{\frac{L}{4\pi} = \frac{(\mathfrak{E} \mathfrak{D})}{4\pi} - U}$$

1) Ein Hinzufügen wahrer Ströme, d. h. solcher wirklicher Elektronen, die man im Gegensatz zu den hier betrachteten virtuellen (2,3) in der Wilsonkammer sehen würde, die aber nicht an der Strahlung des Feldes teilnehmen und die in dieser Theorie nur als Probekörper vorkommen dürften, zu den Gl. (2,1; 2,12) würde zeigen, daß

\mathfrak{D} die Quelllinien wahrer Ladungen,

\mathfrak{S} die Wirbellinien wahrer Ströme beschreibt,

und würde bestätigen, daß \mathfrak{E} die Kraft auf die wahre Ladung und \mathfrak{B} die Kraft auf den wahren Strom bedeutet. Vgl. auch C. F. v. Weizsäcker, Ann. d. Phys. 17. S. 869. 1933.

und berechnen ihre partiellen Ableitungen nach \mathfrak{B} und \mathfrak{E} : Wir finden (aus einer Änderung des Feldes um $\delta\mathfrak{E}, \delta\mathfrak{B}, \delta\mathfrak{D}, \delta\mathfrak{H}$):

$$\frac{\delta L}{4\pi} = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi} \delta\mathfrak{D} + \frac{\mathfrak{D}}{4\pi} \delta\mathfrak{E} - \frac{\partial U(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})}{\partial \mathfrak{B}} \delta\mathfrak{B} - \frac{\partial U(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})}{\partial \mathfrak{D}} \delta\mathfrak{D}$$

oder nach (2,10):

$$\frac{\delta L}{4\pi} = \frac{\mathfrak{D}}{4\pi} \delta\mathfrak{E} - \frac{\partial U(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})}{\partial \mathfrak{B}} \delta\mathfrak{B},$$

also:

$$(2,15) \quad \boxed{\frac{\partial L(\mathfrak{B}, \mathfrak{E})}{\partial \mathfrak{E}} = \mathfrak{D}}$$

und wegen (2,11):

$$(2,16) \quad \boxed{\frac{\partial L(\mathfrak{B}, \mathfrak{E})}{\partial \mathfrak{B}} = -\mathfrak{H}}$$

und sehen, daß diese partiellen Ableitungen von L durch Gl. (2,12) verknüpft sind zu einer Differentialgleichung für L

$$(2,17) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{E}} + \text{rot} \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{B}} = 0,$$

welche äquivalent ist mit dem Variationsprinzip:

$$(2,18) \quad \boxed{\int \int L(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}) dV dt = \text{Extrem}}$$

für die *Lagrangefunktion* $L = L(\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$ unter den Nebenbedingungen (2,1) oder (2,2). Die Lagrangeschen Gleichungen (2,1; 2,15; 2,16; 2,18), die ebenso wie die Hamiltonschen Gleichungen (2,1; 2,10; 2,11; 2,12) den Ablauf des Feldes bestimmen, sollen nun ihren Inhalt bekommen durch Aufstellung einer Lagrangefunktion $L = L(\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$, welche eine Lorentz- und Spiegelinvariante sein muß.

Alle Lorentzinvarianten des antisymmetrischen Tensors $\mathfrak{B}, \mathfrak{E}$ müssen Funktionen der beiden Lorentzinvarianten $\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2$ und $(\mathfrak{E}\mathfrak{B})$ sein, von denen aber die zweite nicht Spiegelinvariant ist.

Im niedrigsten zweiten Grade gibt es also nur die Lorentz- und Spiegelinvariante $\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2$, die als Lagrangefunktion nach (2,15; 2,16; 2,18) zu den bekannten linearen Maxwellschen Vakuumgleichungen $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ und (2,4) führt.

Im nächsthöheren vierten Grade können nur die Lorentz- und Spiegelinvarianten $(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2)^2$ und $(\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2$ gebildet werden. Also entspricht der allgemeinsten bis zur 4. Ordnung in den Feldstärken korrigierten Hamiltonfunktion (2,13) eine Lagrangefunktion

$$(2,19) \quad \boxed{\frac{L}{4\pi} = \frac{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2}{8\pi} + \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [-\alpha(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2)^2 - \beta(\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2] = \frac{L_0 + L_1}{4\pi}}$$

worin $-\alpha$ und $-\beta$ Zahlenkoeffizienten sind.

Für diese Lagrangefunktion werden die Verknüpfungsgleichungen der Feldstärken $\mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ mit den Größen $\mathfrak{D}, \mathfrak{H}$ (2,15; 2,16):

$$(2,20) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{D}}{4\pi} = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi} + \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [-4\alpha(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2)\mathfrak{E} - 2\beta(\mathfrak{B}\mathfrak{E})\mathfrak{B}] \\ \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi} + \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [-4\alpha(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2)\mathfrak{B} + 2\beta(\mathfrak{B}\mathfrak{E})\mathfrak{E}] \end{cases}$$

deren Umkehrung (bei konsequenter Vernachlässigung höherer als 4. Potenzen in den Feldstärken) lautet:

$$(2,20) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{E}}{4\pi} = \frac{\mathfrak{D}}{4\pi} + \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [+4\alpha(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{H}^2)\mathfrak{D} + 2\beta(\mathfrak{D}\mathfrak{H})\mathfrak{H}] \\ \frac{\mathfrak{B}}{4\pi} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} + \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [+4\alpha(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{H}^2)\mathfrak{H} - 2\beta(\mathfrak{D}\mathfrak{H})\mathfrak{D}] \end{cases}$$

Zur Lagrangefunktion (2,19) gehört daher (2,14; 2,20) die Hamiltonfunktion:

$$(2,21) \quad U = \frac{\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2}{8\pi} + \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [\alpha(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + \beta(\mathfrak{D}\mathfrak{B})^2] = U_0 + U_1.$$

Damit ist die Wechselwirkungsenergie U_1 der Lichtquanten bis auf zwei numerische Konstanten α und β bestimmt. Diese werden in § 8 durch Ausrechnung des Diracschen Matricelements H_{in}^4 in zwei speziellen, möglichst einfachen Fällen und Vergleich mit (2,21) festgelegt werden.

§ 3. Diskussion der Vertauschungsrelationen für die Feldstärken im System der korrigierten Maxwellgleichungen

Die Gl. (2,20) führten zu dem merkwürdigen Resultat, daß die elektrische Feldstärke \mathfrak{E} und die zu den Potentialen $-\frac{1}{4\pi c} \mathfrak{A}$ konjugierte Größe \mathfrak{D} (2,6) verschieden sind, während wir doch die allgemeine Theorie von Licht und Materie¹⁾ voraussetzten, in der sie gleich sind. Der darin liegende scheinbare Widerspruch erfordert eine ausführliche Diskussion. Es hat sich herausgestellt, daß der hier vorliegende physikalische Sachverhalt am besten klargemacht werden kann, wenn man das System: Strahlungs- und Materiefeld mit dem mechanischen System zweier Atome vergleicht. Wir führen diesen Vergleich durch, indem wir neben jede Eigenschaft des einen Systems die entsprechende des anderen Systems stellen:

1) W. Heisenberg u. W. Pauli, Ztschr. f. Phys. 56. S. 1. 1930; 59. S. 168. 1930.

Ein Licht- und Materiefeld kann beschrieben werden durch die Potentiale der Strahlung und die Dichte der Materie. Wenn keine wirklichen Elektronen anwesend sind und die Energie des Feldes nicht ausreicht, um Paare zu erzeugen, werden die Feldstärken zur Charakterisierung des Zustandes ausreichen.

Es können jedoch virtuell Paare erzeugt werden, die wieder zerstrahlen, und durch diese Übergänge entsteht eine Wechselwirkung zwischen den Lichtquanten.

Beschreibt man nun das Feld durch Gleichungen, die die Feldstärken allein enthalten, so muß man die Wechselwirkung zwischen den Lichtquanten, d. h. die nicht-lineare Korrektur der Maxwellgleichungen, berücksichtigen.

Der Zusatz L_1 zur Maxwellschen Lagrangefunktion L_0 enthält die magnetische Induktion \mathfrak{B} und die elektrische Feldstärke \mathfrak{E} (= Zeitableitung der Potentiale):

$$(3,19) \quad \begin{cases} L = L_0(\mathfrak{E}, \mathfrak{B}) + L_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{B}), \\ L_0 = \int \frac{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2}{2} dV. \end{cases}$$

Die zum Potential $-\frac{1}{4\pi c}\mathfrak{A}$ konjugierte Größe \mathfrak{D} (2,6) ist daher nicht die elektrische Feldstärke, sondern es ist:

Zwei Atome können beschrieben werden durch die Koordinaten ihrer Kerne und die Koordinaten ihrer Elektronen. Wenn vorausgesetzt wird, daß die Elektronen im Grundzustand sind, müssen die Koordinaten der Kerne allein zur Charakterisierung des Zustandes ausreichen.

Die Elektronen der beiden Atome können jedoch virtuell angeregt werden und wieder in den Grundzustand zurückkehren, und infolge dieser Übergänge wird es eine Wechselwirkung zwischen den Kernen geben: die van der Waalsche Anziehung.

Beschreibt man jetzt, etwa zur Berechnung der Bandenspektren des Moleküls, das System durch die Freiheitsgrade der Kerne allein, so müssen in ihren Bewegungsgleichungen die zusätzlichen van der Waalschen Kräfte auftreten.

Der van der Waalsche Beitrag L_1 zur Lagrangefunktion hängt von den Koordinaten q_i und bei genauer Berechnung, die wir hier voraussetzen wollen, auch von den Geschwindigkeiten \dot{q}_i der Kerne ab:

$$\begin{aligned} L &= L_0(q_i, \dot{q}_i) + L_1(q_i, \dot{q}_i), \\ L_0 &= \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 + \text{Funkt}(q_i). \end{aligned}$$

Die zu den Kernkoordinaten q_i konjugierten Größen p_i sind daher nicht die mit den Massen multiplizierten Geschwindigkeiten, sondern es ist:

$$(3,15) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(-\frac{\mathfrak{U}}{4\pi c}\right)} &= \mathfrak{D} \\ (3,20) \left\{ \begin{aligned} &= \mathfrak{E} + \frac{\partial L_1}{\partial \left(-\frac{\mathfrak{U}}{4\pi c}\right)}; \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Zwischen den Feldstärken bestehen daher jetzt nicht die gewöhnlichen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_i(\xi) \mathfrak{B}_k(\xi) - \mathfrak{B}_k(\xi) \mathfrak{E}_i(\xi) \\ = 2hc i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \delta(\xi - \xi'), \end{aligned}$$

sondern die abgeänderten:

$$(3,7) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{D}_i(\xi) \mathfrak{B}_k(\xi) - \mathfrak{B}_k(\xi) \mathfrak{D}_i(\xi) \\ = 2hc i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \delta(\xi - \xi'). \end{aligned} \right.$$

Im allgemeinen Fall jedoch, in dem das Strahlungsfeld auch Paare erzeugen kann, muß man das Gesamtfeld durch die Feldstärken und Materiedichten beschreiben, und die Wechselwirkung der Lichtquanten tritt nicht explizit in den Gleichungen auf: Die Lagrangefunktion enthält die Feldstärken nur in der Form:

$$L = L_0(\mathfrak{E}, \mathfrak{B}) + L' \text{ (Materie).}$$

Dann ist aber wieder zu den Potentialen die elektrische Feldstärke konjugiert:

$$\frac{\partial L}{\partial \left(-\frac{\mathfrak{U}}{4\pi c}\right)} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E}$$

und die Vertauschungsrelationen lauten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_i(\xi) \mathfrak{B}_k(\xi) - \mathfrak{B}_k(\xi) \mathfrak{E}_i(\xi) \\ = 2hc i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \delta(\xi - \xi') \end{aligned}$$

im Gegensatz zum Spezialfall (2,5).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} = p_i = m \dot{q}_i + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}; \\ p_i \neq \dot{q}_i m. \end{aligned}$$

Zwischen den Koordinaten und Geschwindigkeiten der Kerne bestehen daher jetzt nicht die gewöhnlichen Vertauschungsrelationen:

$$m \dot{q}_i q_i - q_i m \dot{q}_i = \frac{\hbar}{i},$$

sondern die abgeänderten:

$$p_i q_i - q_i p_i = \frac{\hbar}{i}.$$

Im allgemeinen Fall jedoch, in dem die Elektronen auch aus dem Grundzustand herauskönnen, muß man das System durch die Freiheitsgrade der Kerne und Elektronen beschreiben. Und die van der Waalsschen Kräfte treten nicht explizit in den Gleichungen auf: Die Lagrangefunktion enthält die Kernkoordinaten und -Geschwindigkeiten nur in der Form:

$$L = L_0(q_i, \dot{q}_i) + L' \text{ (Elektronen).}$$

Dann sind aber wieder zu den Kernkoordinaten die mit der Masse multiplizierten Geschwindigkeiten konjugiert:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = m \dot{q}_i$$

und die Vertauschungsrelationen lauten:

$$m \dot{q}_i q_i - q_i m \dot{q}_i = \frac{\hbar}{i}.$$

im Gegensatz zum Spezialfall.

Ebenso wie in der Lagrangeschen Mechanik können die oben beschriebenen Verhältnisse auch in der Hamiltonschen Mechanik ausgedrückt werden (wir bezeichnen mit $[ab]$ die Vertauschung: $ab - ba$).

Im *allgemeinen* enthält die Hamiltonfunktion H des Feldes die Energie H_0 des Lichts und die Energie H' der Materie. Die Feldpotentiale \mathfrak{A} sind mit H' vertauschbar und darum ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$:

$$H = H_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) + H'(\text{Materie}),$$

$$H_0 = \int \frac{(\text{rot } \mathfrak{A})^2 + \mathfrak{D}^2}{8\pi} dV,$$

\mathfrak{D} zu \mathfrak{A} konjugiert (2,6), \mathfrak{D} und \mathfrak{A} mit H' vertauschbar,

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}} = -\frac{i}{c\hbar} [H \mathfrak{A}]$$

$$= -\frac{i}{c\hbar} [H_0 \mathfrak{A}] = \mathfrak{D},$$

also $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$.

Im *speziellen* Fall aber, in dem keine wirkliche Materie erzeugt wird, kann die Energie der Elektronen durch eine Wechselwirkung der Lichtquanten $H_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})$ ersetzt werden. Diese ist aber jetzt nicht mit den Feldpotentialen \mathfrak{A} vertauschbar und daher ist $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{D}$:

$$(2,22) \quad H = H_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) + H_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}),$$

\mathfrak{D} zu \mathfrak{A} konjugiert (2,6),

$$(3,21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}} = -\frac{i}{c\hbar} [H \mathfrak{A}] \\ &= -\frac{i}{c\hbar} [H_0 \mathfrak{A}] \\ &\quad -\frac{i}{c\hbar} [H_1 \mathfrak{A}] = \mathfrak{D} + \dots, \end{aligned} \right.$$

also $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{D}$.

Im *allgemeinen* enthält die Hamiltonfunktion H des Moleküls die Energie H_0 der Kerne und die Energie H' der Elektronen. Die Kernkoordinaten q_i sind mit H' vertauschbar und darum ist $m \dot{q}_i = p_i$:

$$H = H_0(q_i, p_i) + H'(\text{Elektronen}),$$

$$H_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \text{Funkt}(q_i),$$

p_i zu q_i konjugiert, $d\hbar p_i q_i - q_i p_i = \frac{\hbar}{i}$, q_i vertauschbar mit H' ,

$$m \dot{q}_i = \frac{m i}{\hbar} [H q_i]$$

$$= \frac{m i}{\hbar} [H_0 q_i] = p_i,$$

also $m \dot{q}_i = p_i$.

Im *speziellen* Fall aber, in dem die Atome nicht wirklich angeregt werden, kann die Energie der Elektronen durch die van der Waals-Kraft zwischen den Kernen $H_1(q_i, p_i)$ ersetzt werden. Diese ist aber jetzt nicht mit den Kernkoordinaten vertauschbar und darum ist $m \dot{q} \neq p$:

$$H = H_0(p_i, q_i) + H_1(p_i, q_i),$$

p_i zu q_i konjugiert,

$$d\hbar p_i q_i - q_i p_i = \frac{\hbar}{i}.$$

$$m \dot{q}_i = \frac{m i}{\hbar} [H q_i] = \frac{m i}{\hbar} [H_0 q_i] + \frac{m i}{\hbar} [H_1 q_i] = p_i + \dots,$$

also $m \dot{q} \neq p$.

Dieser Vergleich macht es noch einmal deutlich, daß es sich bei der angeschriebenen Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen des Vakuums nicht um eine Abänderung der heutigen Feldtheorie¹⁾, sondern nur um einen speziellen Ausschnitt aus ihr handelt.

Außerdem betont er den folgenden Sachverhalt: Die Wechselwirkung zwischen den Lichtquanten und die Abänderung der Maxwellgleichungen, die hier angegeben wurde, besteht nur solange wie keine wirklichen Paare erzeugt werden können, aber sie kommt nur dadurch zustande, daß virtuell doch Paare erzeugt werden. Ebenso kann man mit den van der Waalsschen Kräften nur so lange rechnen, wie die Atome im Grundzustand (oder doch in einem bestimmten Zustand) sind, obwohl die Kräfte nur dadurch zustande kommen, daß die Atome virtuell aus dem Grundzustand herausgehen.

Den mathematischen Prozeß der Änderung der Vertauschungsrelationen in einem mechanischen System bei Spezialisierung wird man sich so vorstellen, daß die hier vorgenommene Spezialisierung auf Fälle, in denen keine wirklichen Paare erzeugt werden können, eine Terauswahl im Gesamtsystem von Licht und Materie bedeutet, also eine Beschränkung aller Matrizen auf Teilmatrizen, ein Fortlassen gewisser Übergangs- und Besetzungsmöglichkeiten durch Streichen gewisser Matrixkästchen: Und die übrigbleibenden Teilmatrizen haben andere Vertauschungsrelationen als die ganzen.



II. Teil

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen über die allgemeine Form des Resultats haben wir nun das Matricelement H_{in}^4 der Diracschen Theorie für Streuung von Licht an Licht aufzustellen, zu zeigen, daß es mit dem entsprechenden Matricelement einer Wechselwirkungsenergie von Licht mit Licht

$$(2,21) \quad \bar{U}_1 = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \int [\alpha (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2) + \beta (\mathfrak{B} \mathfrak{D})^2] dV$$

identisch ist

$$(g_1 g_2 | \bar{U}_1 | -g_3 - g_4) = H_{in}^4,$$

und es schließlich in zwei einfachen Spezialfällen auszurechnen, welche die Bestimmung der beiden Konstanten α, β in \bar{U}_1 gestatten. Wir beginnen mit der ausführlichen Darstellung des Störungsschemas, welches zu diesen Rechnungen verwandt werden soll.

1) Vgl. Fußnote S. 407.

§ 4. Allgemeines Störungsschema,
das zur Berechnung der Streuung von Licht an Licht verwandt wird

In einem abgeschlossenen System mit den annähernd stationären Zuständen i, k, l, m, n, μ, μ' , die die Energien E_i, E_k, \dots und die Besetzungswahrscheinlichkeiten $|a_i|^2, |a_k|^2, \dots$ haben, ruft eine Störung mit der zeitunabhängigen Energiematrix V_{ik} die Zustandsänderungen:

$$(4,1) \quad i \hbar \frac{\partial}{\partial t} a_\mu'(t) = \sum_\mu e^{\frac{i}{\hbar}(E_{\mu'} - E_\mu)t} V_{\mu\mu'} a_\mu(t)$$

hervor. (t : Zeit, $\hbar = 2\pi\hbar$: Plancksches Wirkungsquantum). Entwickelt man die Störung V und die Zustände a_μ nach einem kleinen Parameter:

$$(4,2) \quad \begin{cases} V = V^1 + V^2 + V^3 + V^4 + \dots \\ a_\mu = a_\mu^0 + a_\mu^1 + a_\mu^2 + a_\mu^3 + a_\mu^4 + \dots, \end{cases}$$

und setzt voraus, daß zu Anfang der Zustand i verwirklicht sei ($a_\mu^0(t) = \delta_{i\mu}$, $a_\mu^a(0) = 0$ für $a \geq 1$), so folgt in 1. Näherung:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} a_k^1(t) = \sum_\mu e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_\mu)t} V_{\mu k} a_\mu^0(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_i)t} V_{ik},$$

integriert:

$$(4,3) \quad a_k^1(t) = \left(\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_i)t} - 1}{E_i - E_k} \right) \cdot V_{ik}.$$

Der zweite Faktor dieser Näherung ist das Matricelement der Störung V^1 für den Übergang $i \rightarrow k$. Der erste Faktor ist nur beträchtlich innerhalb des Ungenauigkeitsbereichs $|E_k - E_i| \lesssim \frac{\hbar}{t}$. D. h. für kleine t ist $a^1(t)$ immer von Bedeutung, für große t aber nur, falls das System unter Energieerhaltung $E_i = E_k$ vom Zustand i in den Zustand k übergehen kann.

Eine Übergangswahrscheinlichkeit $i \rightarrow k$ erster Ordnung

$$(|a^1(t)|^2 \neq 0 \text{ für große } t)$$

besteht also nur, wenn $V_{ik} \neq 0$ und $E_i = E_k$ ist.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, berechnet man in bekannter Weise nach Dirac die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit $i \rightarrow k$ zu:

$$(4,4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{k'=k} |a_{k'}(t)|^2 &\approx \frac{1}{t} |V_{ik}^1|^2 \cdot \frac{1}{\Delta E} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{1 - \cos(E_{k'} - E_i) \frac{t}{\hbar}}{(E_i - E_{k'})^2} dE_{k'} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{\Delta E} \cdot |V_{ik}^1|^2, \end{aligned} \right.$$

worin $1/\Delta E$ die Termichte im Energiespektrum des Systems beim Endzustand k bedeutet.

Wenn es aber in erster Ordnung keine Übergangswahrscheinlichkeit gibt, muß man höhere Näherungen betrachten. Wir nehmen jetzt an, daß bis zur $(\beta - 1)$ ten Ordnung alle Übergangswahrscheinlichkeiten (von jedem Zustand i zu jedem anderen Zustand gleicher Energie) verschwinden und daß es zuerst in β ter Näherung Übergänge geben kann, daß also

$$(4.5) \quad |a_\mu^1(t)|^2 = |a_\mu^2(t)|^2 = |a_\mu^3(t)|^2 = \dots = |a_\mu^{\beta-1}(t)|^2 = 0, \quad |a_\mu^\beta(t)|^2 \neq 0$$

für große t und alle $\mu \neq i$, wenn $E_\mu = E_i$.

Unter dieser Voraussetzung stellen wir die *Behauptung* auf: Alle Näherungen bis einschließlich zur β ten haben die Zeitabhängigkeit:

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{\mu}^{\alpha'}(t) &= \left(\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_\mu - E_i)t} - 1}{E_i - E_\mu} \right) \cdot H_{i\mu}^{\alpha'} + \sum_{\kappa \neq i} \left(\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_\mu - E_\kappa)t} - 1}{E_\kappa - E_\mu} \right) \cdot K_{\kappa\mu}^{\alpha'} \\ &\text{für } \alpha' = 1, 2, \dots, \beta - 1, \beta. \end{aligned} \right.$$

Darin bedeutet:

i den Index des Anfangszustandes,

μ den Index des betrachteten Zustandes,

κ den Index eines von i und μ verschiedenen „Zwischen“zustandes.

Der erste Summand führt vom Anfangszustand i nach dem betrachteten Zustand μ , d. h. sein Zeitfaktor ist bei großem t nur für $E_i = E_\mu$ groß.

Der zweite Summand führt von einem vom Anfangszustand verschiedenen Zustand $\kappa \neq i$ zum betrachteten Zustand μ , d. h. sein Zeitfaktor wiegt bei großem t nur für $E_\kappa = E_\mu$.

$H_{i\mu}^{\alpha'}$ und $K_{\kappa\mu}^{\alpha'}$ sollen die Zeit t nicht enthalten.

Beweis: Für die erste Ordnung ist die Behauptung schon durch (4.3) erwiesen und zwar ist

$$(4.7) \quad \boxed{H_{i\mu}^1 = V_{i\mu}^1}, \quad K_{\kappa\mu}^1 = 0.$$

Wir nehmen nun an, daß die Behauptung für alle Lösungen bis einschließlich zur $(\alpha - 1)$ ten bewiesen sei

$$(\alpha' = 1, 2, \dots, (\alpha - 1); \quad \alpha - 1 < \beta),$$

und zeigen, daß sie dann auch für die α te richtig ist ($\alpha' = \alpha < \beta$). Die α te Näherung wird (wenn wir zu Anfang den Zustand i wirklich denken und als vorläufigen Abschluß den Zustand μ' betrachten):

$$(4,8) \left\{ \begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} a_{\mu'}^{\alpha}(t) &= \sum_{\mu} e^{\frac{i}{\hbar} (E_{\mu'} - E_{\mu}) t} \\ &\cdot [a_{i\mu}^{\alpha-1} V_{\mu\mu'}^1 + \dots + a_{i\mu}^1 V_{\mu\mu'}^{\alpha-1} + a_{i\mu}^0 V_{\mu\mu'}^{\alpha}] \end{aligned} \right.$$

und mit (4,6):

$$(4,8') \left\{ \begin{aligned} &= e^{\frac{i}{\hbar} (E_{\mu'} - E_i) t} \cdot \left[\sum_{\mu} \frac{H_{i\mu}^{\alpha-1} V_{\mu\mu'}^1}{E_i - E_{\mu}} + \dots + \sum_{\mu} \frac{H_{i\mu}^1 V_{\mu\mu'}^{\alpha-1}}{E_i - E_{\mu}} + V_{\mu\mu'}^{\alpha} \right] \\ &+ \sum_{\mu' \neq i} e^{\frac{i}{\hbar} (E_{\mu'} - E_{\mu'}) t} \cdot K_{\mu'\mu}^{\alpha} \end{aligned} \right.$$

Darin faßt der erste Teil alle Glieder zusammen, deren Zeitfaktor im Exponent die Energiedifferenz $E_i - E_{\mu'}$ vom Anfangszustand und dem betrachteten vorläufigen Endzustand μ' hat (und die durch Einsetzen des ersten Teils vom ersten Summanden (4,6) in (4,8) entstehen). Und der zweite Teil faßt alle Glieder zusammen, die diese Eigenschaft nicht haben, und die ausführlich lauten würden:

$$(4,9) \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\mu' \neq i} e^{\frac{i}{\hbar} (E_{\mu'} - E_{\mu'}) t} \cdot K_{\mu\mu'}^{\alpha} = - \sum_{\mu} e^{\frac{i}{\hbar} (E_{\mu'} - E_{\mu}) t} \\ &\cdot \left[\frac{H_{i\mu}^{\alpha-1} V_{\mu\mu'}^1}{E_i - E_{\mu}} + \dots + \frac{H_{i\mu}^1 V_{\mu\mu'}^{\alpha-1}}{E_i - E_{\mu}} \right] \\ &+ \sum_{\substack{\mu \neq i \\ \mu' \neq i}} \left(e^{\frac{i}{\hbar} (E_{\mu'} - E_{\mu'}) t} - e^{\frac{i}{\hbar} (E_{\mu'} - E_{\mu}) t} \right) \\ &\cdot \left[\frac{K_{\mu\mu}^{\alpha-1} V_{\mu\mu'}^1}{E_{\mu} - E_{\mu}} + \dots + \frac{K_{\mu\mu}^2 V_{\mu\mu'}^{\alpha-2}}{E_{\mu} - E_{\mu}} \right] \end{aligned} \right.$$

Zeitintegration von (4,8') ergibt für die α te Näherung einen Ausdruck der Form (4,6), wenn man

$$(4,10) \quad H_{i\mu'}^{\alpha} = \sum_{\mu} \frac{H_{i\mu}^{\alpha-1} V_{\mu\mu'}^1}{E_i - E_{\mu}} + \dots + \sum_{\mu} \frac{H_{i\mu}^1 V_{\mu\mu'}^{\alpha-1}}{E_i - E_{\mu}} + V_{i\mu'}^{\alpha}$$

setzt, womit die Behauptung bewiesen ist.

Nach Voraussetzung (4,5) sind nun der erste und der zweite Summand von (4,6) in allen Näherungen bis einschließlich zur $(\beta-1)$ ten klein für große t

$$(4,6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{d. h. } E_{\mu} \neq E_i \quad \text{falls} \quad H_{i\mu}^{\alpha} \neq 0 \\ &\text{und } E_{\mu} \neq E_{\mu'} \quad \text{falls} \quad K_{\mu\mu'}^{\alpha} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } \alpha' = 1, 2, \dots, \beta-1.$$

Ferner ist der zweite Summand (4,6) der β ten Näherung klein für große t (d. h. $E_\mu \neq E_\kappa$ falls $K_{\mu\kappa}^\beta \neq 0$). Denn anderenfalls hätte es, wie man aus (4,9) ersieht, schon in früherer als β ter Näherung einen Übergang $\kappa \rightarrow \mu'$ gegeben gegen die Voraussetzung. Aus demselben Grund sind alle in (4,10) vorkommenden Nenner $\neq 0$.

Da aber in β ter Näherung eine Übergangswahrscheinlichkeit $i \rightarrow \mu'$ bestehen soll, muß diese vom ersten Summanden (4,6) herühren, also durch

$$|a_{i\mu'}^\beta(t)|^2 = |H_{i\mu'}^\beta|^2 2 \frac{1 - \cos(E_{\mu'} - E_i) \frac{t}{\hbar}}{(E_i - E_{\mu'})^2}$$

bestimmt sein, woraus nach der obigen Diracschen Schlußweise (4,4) die Übergangswahrscheinlichkeit folgt:

$$(4,11) \quad \boxed{\frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\Delta E} \cdot |H_{i\mu'}^\beta|^2}.$$

(4,11), (4,10) und (4,7) enthalten das Resultat der Störungsrechnung: Die Übergangswahrscheinlichkeit in der kleinsten nichtverschwindenden (β ten) Ordnung ist Produkt aus der (mit $2\pi/\hbar$ multiplizierten) Zahl der Zustände $1/\Delta E$ pro Energieintervall beim Endzustand und dem Quadrat eines „Matrixelements“.

Das Matrixelement β ter Ordnung (4,10) $H_{i\mu'}^\beta$, welches vom Anfangszustand i zum Endzustand μ' führt, ist zusammengesetzt aus den Matrixelementen $V_{ik}^{\beta' < \beta}$ der Störungsenergie; z. B.

$$(4,12) \quad H_{in}^4 = \frac{V_{ik}^1 V_{ke}^1 V_{em}^1 V_{mn}^1}{(E_i - E_k)(E_i - E_e)(E_i - E_m)} + \dots + V_{in}^4{}^1).$$

Hierbei können einige Teile der Störungsenergie (V^4) direkt in erster Ordnung vom Anfangszustand (i) zum Endzustand (n) führen, andere Störungen (V^1) dagegen nur durch Teilprozesse

$$(i \rightarrow k, \quad k \rightarrow l, \quad l \rightarrow m, \quad m \rightarrow n)$$

über Zwischenzustände (k, l, m) in höherer (4ter) Ordnung. Diese Teilprozesse zu den „virtuellen“ Zwischenzuständen verlangen keine Energieerhaltung wie der Gesamtprozeß ($i \rightarrow n$) zum wirklichen Endzustand. Obwohl also die Zustände k, l, m wegen des Energiesatzes gar nicht wirklich vom System angenommen werden können (sonst hätte es schon in früherer Näherung Übergänge gegeben, welche der hier angegebenen Formel die Voraussetzung entziehen

1) Die Matrix (4,12) ist in Anfangs- und Endzustand symmetrisch: ($H_{in}^* = H_{ni}$), wie aus der Symmetrie der Störungen $V_{ik} = V_{ki}^*$ und aus der Energieerhaltung $E_i = E_n$ folgt.

würden), bewirkt doch ihre virtuelle Möglichkeit den betrachteten Übergang $i \rightarrow n$. Auf diesem Umstand beruht die Streuung von Licht an Licht.

§ 5. **Aufstellung der Matrix H_{in}^4 der Diracschen Theorie für Streuung von Licht an Licht**

Wir wenden dieses Störungsschema an auf das *System*: Strahlungs- und Materiefeld. Als seine annähernd stationären Zustände wählen wir ebene Licht- und Materiewellen. Die *Störungsenergie* besteht dann aus der Koppelung zwischen Licht und Materie und gewissen Subtraktionsgliedern, die nach Heisenberg¹⁾ mit der Hamiltonfunktion der gewöhnlichen Löchertheorie kombiniert werden müssen, um endliche und mit den Erhaltungssätzen verträgliche Resultate zu ergeben.

Im folgenden bezeichnet:

$$(5,1) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \text{ das Vektorpotential des Strahlungsfeldes,} \\ \psi(\xi, s), (s = 1, 2, 3, 4) \text{ die Wellenfunktion des Materiefeldes,} \\ \alpha = \alpha_s, \text{ den Diracoperator,} \\ \xi, dV \text{ Ort und Volumenelement im Strahlungsfeld,} \\ V \text{ das Volumen eines Würfels, in dem das} \\ \text{Feld als periodisch angenommen wird,} \\ g, e \text{ Impuls und Polarisation eines Lichtquants,} \\ p, \sigma \rightarrow \pm 1, \lambda \rightarrow \pm 1 \text{ Impuls, Spin und Energievorzeichen eines} \\ \text{Elektrons,} \\ d\mathfrak{p} \text{ das Impulsraumelement,} \\ M_{ge}, B_{ge} \text{ Besetzungszahl und Amplitude der ebenen} \\ \text{Lichtwelle } g, e, \\ N_{p\sigma\lambda}, A_{p\sigma\lambda} \text{ Besetzungszahl und Amplitude der ebenen} \\ \text{Materiewelle } p, \lambda, \sigma, \\ c, h = 2\pi\hbar \text{ Lichtgeschwindigkeit und Plancksches} \\ \text{Wirkungsquantum,} \\ e, m \text{ Elektronen-Ladung und -Masse.} \end{array} \right.$$

Die Zerlegung des Feldes nach ebenen Wellen ist:

$$(5,2) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \sum_{g e} \mathfrak{A}_g (B_{ge} + B_{-ge}^*), \quad \mathfrak{A}_g = e \sqrt{\frac{c \hbar}{|g| V}} e^{\frac{i}{\hbar} (g \xi)}, \\ \psi = \sum_{p \lambda \sigma} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} (p \xi)}}{\sqrt{V}} \cdot a_{p \lambda \sigma}(s) \cdot A_{p \lambda \sigma}, \quad (e e) = 1, (e g) = 0, \\ \sum_{s=1}^4 |a_{p \lambda \sigma}(s)|^2 = 1. \end{array} \right.$$

1) W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys. 90. S. 209. 1934.

Die Potentiale und Dichten sind Operatoren, charakterisiert durch die Matriceigenschaften ihrer Fourieramplituden:

B_g^* bzw. B_g bedeutet das Entstehen bzw. Verschwinden eines Lichtquants, A_v^* bzw. A_v bedeutet das Entstehen bzw. Verschwinden eines Elektrons, d. h. das Matricelement von B_g^* ist $\neq 0$ nur für einen Übergang, bei dem ein Lichtquant g entsteht:

$$(5,3) \left\{ \begin{array}{l} (\dots M_g \dots | B_g^* | \dots M_g + 1 \dots) = \sqrt{M_g + 1}, \\ (\dots M_g \dots | B_g | \dots M_g - 1 \dots) = \sqrt{M_g}, \\ (\dots N_v \dots | A_v^* | \dots N_v + 1 \dots) = \sqrt{1 - N_v} \cdot J \\ (\dots N_v \dots | A_v | \dots N_v - 1 \dots) = \sqrt{N_v} \cdot J \end{array} \right.$$

mit der Jordan-Wignerschen Vorzeichenfunktion:

$$J = (-1)^{\sum_{v' < v} N_{v'}},$$

Ein Prozeß der Streuung von Licht an Licht wird beschrieben durch:

$$(5,4) \left\{ \begin{array}{l} g^1, g^2, \quad g^1 = |g^1|, \quad g^2 = |g^2|, \\ \text{die Impulse und Energien der beiden primären, absorbierten} \\ \text{Lichtquanten;} \\ -g^3, -g^4, \quad -g^3 = |g^3|, \quad -g^4 = |g^4|, \\ \text{die Impulse und Energien der beiden sekundären, emit-} \\ \text{tierten Lichtquanten;} \\ e^1, e^2, e^3, e^4, \quad (|e^1| = 1; \quad e^1 \perp g^1 \dots) \\ \text{die dazugehörigen Polarisationen;} \\ (g^1, g^2 | 0 | -g^3, -g^4) \\ \text{das Matricelement eines Operators } 0 \text{ für Streuung von Licht} \\ \text{an Licht, d. h. für den Übergang zweier Lichtquanten } g^1, g^2 \\ \text{in zwei andere } -g^3, -g^4 \text{ (statt der ausführlichen Bezeichnung:} \\ [\dots N_{g^1} N_{g^2} \dots N_{-g^3} N_{-g^4} \dots | 0 | \dots N_{g^1} - 1, N_{g^2} - 1, \\ \dots N_{-g^3} + 1, N_{-g^4} + 1 \dots]). \end{array} \right.$$

Die Störungsenergie des nach ebenen Wellen approximierten Feldes enthält, entwickelt nach Potenzen der Elektronenladung e :

Die Koppelung von Licht und Materie, die durch Strom und Potential bestimmt ist:

$$(5,5) \quad V^1 = e \int \psi^* (\alpha \mathcal{A}) \psi dV$$

und die Subtraktionsglieder¹⁾:

$$(5,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^2 = e^2 \int dV \text{ (Funktion zweiter Ordnung in den Feldstärken)} \\ V^3 = e^3 \int dV \text{ (Funktion dritter Ordnung in den Feldstärken)} \\ V^4 = e^4 \left(-\frac{1}{12\pi^2} \right) \left(\frac{1}{\hbar c} \right)^3 \lim_{r \rightarrow 0} \int \frac{\mathfrak{M}(\xi) r^4}{|r|^4} dV. \end{array} \right.$$

V^1 ist erster Ordnung in den Potentialen, zweiter Ordnung in den Materiewellen und gibt daher (5,3) zu Übergängen Anlaß, bei denen ein Lichtquant g entsteht (oder vergeht) und ein Elektron \mathfrak{p} von einem Zustand in einen anderen \mathfrak{p}' springt. Das Matrixelement von V_1 für diesen Übergang ist (5,2, 5,3):

$$(5,7) \quad V_{ik} = e \int \mathfrak{A}_{\mp g} \left(\begin{array}{c} \lambda \sigma \\ \mathfrak{p} | \alpha | \mathfrak{p}' \end{array} \right) \frac{e^{\frac{i}{\hbar} (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}') z}}{V} dV,$$

$$(5,8) \quad = e \sqrt{\frac{c \hbar \hbar}{|g| V}} \left(\begin{array}{c} \lambda \sigma \\ \mathfrak{p} | \alpha e | \mathfrak{p}' \end{array} \right)$$

falls der Impuls beim Übergang erhalten bleibt ($\mathfrak{p} - \mathfrak{p}' = \pm g$), 0 falls er nicht erhalten bleibt.

Darin bezeichnet $\left(\begin{array}{c} \lambda \sigma \\ \mathfrak{p} | \alpha e | \mathfrak{p}' \end{array} \right)$ das Matrixelement der 4 reihigen Diracmatrix (αe) für das Zustandspaar \mathfrak{p} und \mathfrak{p}' eines Elektrons. Die Faktoren $\sqrt{M_g + 1}$ und $\sqrt{M_g}$ sind hier und im folgenden der Kürze halber weggelassen.

V^2 bzw. V^3 sind zweiter bzw. dritter Ordnung in den Feldstärken und führen daher zu Matrixelementen, welche zwei bzw. drei Lichtquanten der Impulssumme 0 kombinieren.

V^4 endlich enthält die Potentiale in vierter Ordnung und kann daher zwei Lichtquanten $+g^1 + g^2$ in zwei andere der gleichen Impulssumme $-g^3 - g^4$ überführen. Sein Matrixelement für diesen Übergang ist (5,2, 5,3):

$$(5,9) \quad (g^1 g^2 | V^4 | -g^3 - g^4) = \frac{64\pi}{3} C \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{\text{Perm}} \frac{(e^1 r) (e^2 r) (e^3 r) (e^4 r)}{|r|^4} = V_{in}^4.$$

Darin bezeichnet \sum_{Perm} die Summe über alle 24 Permutationen der Indizes 1, 2, 3, 4 in den Vektoren e^1, e^2, e^3, e^4 , und es ist:

$$(5,10) \quad C = -\frac{1}{32 \cdot (2\pi)^3} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{\hbar c} \left(\frac{c \hbar \hbar}{V} \right)^2 \frac{V}{\sqrt{g^1 g^2 g^3 g^4}}.$$

1) W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys. 90. S. 209. 1934, Formel 59, 60, 61; Ztschr. Phys. 92. S. 692. 1934.

Zur Streuung von Licht an Licht kann also V_1 nur in 4ter, V^4 aber in 1ter Ordnung führen. Die anderen Glieder V^2 und V^3 geben keinen Beitrag. (Denn V^3 müßte mit V^1 zusammengesetzt werden, was einen Elektronensprung verlangen würde, V^2 aber mit zwei Gliedern V^1 oder mit sich selbst, was den verwandelten Lichtquanten spezielle Bedingungen auferlegen würde.)

D. h.: die Streuung von Licht an Licht ist ein Prozeß 4ter Ordnung in der Diracschen Theorie. Sein Matricelement wird aus der gewöhnlichen Störung V^1 in 4ter Ordnung und dem Heisenberg-schen Subtraktionsglied V^4 in 1ter Ordnung zusammengesetzt: (4,12)

$$(5,11) \quad H_{in}^4 = \sum_{k, e, m} \frac{V_{ik}^1 V_{ke}^1 V_{em}^1 V_{mn}^1}{(E_i - E_k)(E_k - E_e)(E_e - E_m)} + V_{in}^4.$$

Dabei besteht Impulserhaltung für die Teilprozesse ($i \rightarrow k$, $k \rightarrow e$, $e \rightarrow m$, $m \rightarrow n$) und damit für den ganzen Prozeß, Energieerhaltung dagegen nur für den Gesamtprozeß ($i \rightarrow n$):

$$(5,11') \quad \begin{cases} g^1 + g^2 + g^3 + g^4 = 0 \\ g^1 + g^2 + g^3 + g^4 = 0. \end{cases}$$

Die Teilprozesse, über welche die Koppelung V^1 zur Streuung von Licht an Licht führt, sind:

Licht- quanten Elek- tronen	Absorption von g^1	Absorption von g^2	Emission von $-g^3$	Emission von $-g^4$
$\mu = 1$	Paarerzeugung	Elektronensprung	Elektronensprung	Paarvernichtung
$\mu = 2$	Paarerzeugung	Elektronensprung	Positronensprung	Paarvernichtung
$\mu = 3$	Paarerzeugung	Positronensprung	Elektronensprung	Paarvernichtung
$\mu = 4$	Paarerzeugung	Positronensprung	Positronensprung	Paarvernichtung
$\mu = 5$	Paarerzeugung	Paarerzeugung	Zerstrahlung des Elektrons vom 1. mit dem Posi- tron vom 2. Paar	Zerstrahlung des Positrons vom 1. mit dem Elek- tron vom 2. Paar
$\mu = 6$	Paarerzeugung	Paarerzeugung	Zerstrahlung des Positrons vom 1. mit dem Elek- tron vom 2. Paar	Zerstrahlung des Elektrons vom 1. mit dem Posi- tron vom 2. Paar

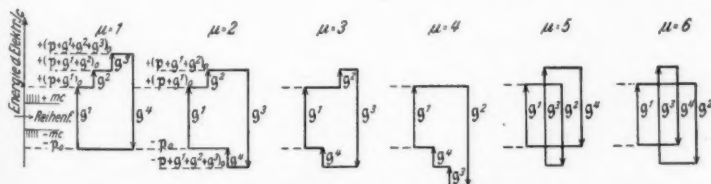


Fig. 1. Die 6 Übergangsmöglichkeiten

Hierbei kann die erste Paarerzeugung statt unter Absorption von g^1 , wie in der Figur (und als Repräsentant in den folgenden Rechnungen) angegeben, auch unter Emission von $-g^3$ vor sich gehen usw. D. h. es können die 4 Überschriften, die über den Spalten der Tabelle in deren oberster Zeile stehen (und in allen folgenden Formeln die 4 Lichtquantenindizes 1, 2, 3, 4) noch in beliebiger Weise permutiert werden unter Beibehaltung aller übrigen Tabellen- (und Formel-) Teile.

Je nach dem Verhalten der erzeugten Paare gibt es 6 verschiedene Übergangswege, bezeichnet durch $\mu = 1$ bis 6 und jeder dieser 6 Übergänge kann mit allen 24 Permutationen der Lichtquanten kombiniert werden.

Im folgenden bezeichnet (vgl. Figur):

$$(5,12) \left\{ \begin{array}{l} p^+ = p \text{ den (negativen) Impuls des zuerst erzeugten Positrons,} \\ p = |p| \text{ seinen Betrag,} \\ \left. \begin{array}{l} p^1 = p + g^1 \\ p^2 = p + g^1 + g^2 \\ p^3 = p + g^1 + g^2 + g^3 = p - g^4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{die Impulse der Elektronen} \\ \text{in den Zwischenzuständen,} \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} p_i^0 = + \sqrt{(mc)^2 + (p^i p^i)}_{(i=1 \dots 4)} \\ \text{z. B.: } p_0^1 = (p + g^1)_0, \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{die entsprechenden (durch} \\ \text{c dividierten) Energiebe-} \\ \text{träge,} \end{array} \\ \lambda_\mu^1, \lambda_\mu^2, \lambda_\mu^3, \lambda_\mu^4 \text{ die Vorzeichen dieser Elektronenenergien für} \\ \text{den } \mu \text{ten Übergangsweg,} \\ Z_\mu = V_{ik}^1 V_{ke}^1 V_{em}^1 V_{mn}^1 \text{ (bis auf einen Faktor) das Produkt der} \\ \text{Matrixelemente der Koppelung } V^1 \text{ im Zähler von (5,11) für} \\ \text{den } \mu \text{ten der 6 Übergangsfälle,} \\ N_\mu = -\frac{1}{8c^3} (E_i - E_k) (E_i - E_e) (E_i - E_m) \text{ das Produkt der} \\ \text{Energiedifferenzen im Nenner des ersten Gliedes von (5,11)} \\ \text{für den } \mu \text{ten der 6 Übergangsfälle.} \end{array} \right. \quad (5,14)$$

Im Matrixelement 4. Ordnung sind dann folgende Summationen auszuführen:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^6 \text{ über die 6 Übergangsfälle,} \\ & \sum_p = \frac{V}{h^3} \int d^3p \text{ über alle Möglichkeiten der ersten Paarerzeugung,} \\ & \sum_\sigma \text{ über den Spin der Elektronen in Anfangs- und Zwischenzuständen;} \\ & \sum_{\text{Perm}} \text{ über die 24 Reihenfolgen der Lichtquanten, d. h. die 24 Permu-} \end{aligned}$$

tationen der 4 Indices i in g^i , g^i und e^i . (Bei Vertauschung der Emission des Lichtquants $-g^3$ mit der Absorption des Lichtquants g^1 wird der Impuls des Elektrons $\mathfrak{p}^1 = \mathfrak{p} + g^1$ mit $\mathfrak{p}^{1'} = \mathfrak{p} + g^3$, und die Energie des Zwischenzustands $\frac{E_k}{c} = \text{const} + g^1$ mit $\frac{E_{k'}}{c} = \text{const} + g^3$ vertauscht. Also ändern in den Formeln (5,11, 5,12) bei Vertauschung von Emission und Absorption Energie und Impuls der Lichtquanten ihr Vorzeichen, was bei unserer Bezeichnung (5,4) von selber durch Permutation der Indizes i in g^i bewirkt wird.)

Das Matricelement kann daher geschrieben werden:

$$(5,13) \quad H_{in}^4 = C \int d\mathfrak{p} \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu=1}^6 \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} + V_{in}^4.$$

Darin sind die Nenner:

$$(5,14) \quad \begin{array}{lll} 8N_1 = (p_0^4 + p_0^1 - g^1) & (p_0^4 + p_0^2 - g^1 - g^2) & (p_0^4 + p_0^3 + g^4) \\ 8N_2 = (p_0^4 + p_0^1 - g^1) & (p_0^4 + p_0^2 - g^1 - g^2) & (p_0^2 + p_0^3 + g^3) \\ 8N_3 = (p_0^4 + p_0^1 - g^1) & (p_0^1 + p_0^3 - g^1 - g^4) & (p_0^2 + p_0^3 + g^3) \\ 8N_4 = (p_0^4 + p_0^1 - g^1) & (p_0^1 + p_0^3 - g^1 - g^4) & (p_0^1 + p_0^2 + g^2) \\ 8N_5 = (p_0^4 + p_0^1 - g^1) (p_0^4 + p_0^1 + p_0^2 + p_0^3 - g^1 - g^3) & & (p_0^1 + p_0^2 + g^2) \\ 8N_6 = (p_0^4 + p_0^1 - g^1) (p_0^4 + p_0^1 + p_0^2 + p_0^3 - g^1 - g^3) & & (p_0^4 + p_0^3 + g^4) \end{array}.$$

In den Zählern Z_{μ} ist über den Spin der Zwischenzustände (1, 2, 3) und des Anfangs- (=End-) Zustandes (4) zu summieren.

Die Spinsummation im Zustand eines Elektrons mit Impuls \mathfrak{p}' und Energievorzeichen λ' kann mit Hilfe des Operators

$$\frac{1}{2} \left(1 - \lambda' \frac{(\alpha \mathfrak{p}') + \beta m c}{p_0'} \right)$$

ausgeführt werden, welcher 1 ergibt, angewandt auf den Zustand mit Impuls \mathfrak{p}' und Energie λ_0' , und 0 ergibt, angewandt auf den Zustand mit Impuls \mathfrak{p}' und Energie $-\lambda' p_0$.

Die Energievorzeichen λ' , λ^2 , λ^3 , λ^4 der Zwischenzustände der Elektronen und die Produkte \mathfrak{p}' der Jordan-Wignerschen Vorzeichenfunktion sind für die 6 Übergangsmöglichkeiten:

Vorzeichen Fälle	λ_μ^1	λ_μ^2	λ_μ^3	λ_μ^4	J'_μ
$\mu = 1$	+	+	+	-	+
$\mu = 2$	+	+	-	-	-
$\mu = 3$	+	+	-	-	-
$\mu = 4$	+	-	-	-	+
$\mu = 5$	+	-	+	-	-
$\mu = 6$	+	-	+	-	-

woraus man sieht, daß $J'_\mu = \lambda_\mu^2 \lambda_\mu^3$ ist.

Also werden die Zähler Z_μ :

$$\begin{aligned}
 Z_\mu &= \frac{\text{Spur}}{4} \lambda_\mu^2 \lambda_\mu^3 (\alpha e^1) \left(1 - \frac{(\alpha p^1) + \beta m c}{p_0^1} \right) \\
 &\quad (\alpha e^2) \left(1 - \lambda_\mu^2 \frac{(\alpha p^2) + \beta m c}{p_0^2} \right) \\
 &\quad (\alpha e^3) \left(1 - \lambda_\mu^3 \frac{(\alpha p^3) + \beta m c}{p_0^3} \right) \\
 &\quad (\alpha e^4) \left(1 + \frac{(\alpha p^4) + \beta m c}{p_0^4} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5,15}$$

mit

$\mu =$	1	2	3	4	5	6
$\lambda_\mu^2 =$	+	+	+	-	-	-
$\lambda_\mu^3 =$	+	-	-	-	+	+

(es ist $Z_2 = Z_3$ und $Z_5 = Z_6$).

**§ 6. Entwicklung nullter Ordnung dieser Matrix H_{in}^4
nach Lichtfrequenzen und Vergleich mit dem Heisenbergschen
Subtraktionsglied**

In (5,13; 5,9; 5,10; 5,14; 5,15) des vorigen Paragraphen wurde das Matricelement H_{in}^4 der Diracschen Theorie für Streuung von Licht an Licht aufgestellt. Es ist eine Funktion der vier Lichtquanten, die an der Streuung teilnehmen, und soll, da das Licht als weich vorausgesetzt wird (0,1) nach den Impulsen $\frac{g^1}{m c}$ $\frac{g^2}{m c}$ $\frac{-g^3}{m c}$ $\frac{-g^4}{m c}$ und Energien $\frac{g^1}{m c}$ $\frac{g^2}{m c}$ $\frac{-g^3}{m c}$ $\frac{-g^4}{m c}$ der Lichtquanten entwickelt werden.

Neben der Entwicklung nach der Elektronenentladung e , für deren 4. Glied wir uns schon durch die Art der Störungsrechnung entschieden haben, führen wir also nun eine Entwicklung nach Lichtfrequenzen durch:

Das Glied nullter Ordnung in der Entwicklung des Matrixelements H_{in}^4 nach Lichtfrequenzen g/mc verschwindet, weil der Anteil, der vom Glied der gewöhnlichen Kopplung V^1 gebildet wird, vom Heisenbergschen Subtraktionsglied V_{in}^4 aufgehoben wird, wie wir im folgenden zeigen:

In nullter Ordnung sind die Nenner (5,14):

$$(6,1) \quad N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = p_0^3, \quad N_5 = N_6 = 2p_0^3.$$

Die hierdurch dividierten Zähler (5,15):

$$(6,2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} = \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{1}{N_{\mu}} \frac{\text{Spur}}{4} \lambda_{\mu}^2 \lambda_{\mu}^3 \\ & \cdot (\alpha e^1) \left(1 - \frac{(\alpha p) + \beta mc}{p_0} \right) (\alpha e^2) \left(1 - \lambda^2 \frac{(\alpha p) + \beta mc}{p_0} \right) \\ & \cdot (\alpha e^3) \left(1 - \lambda^3 \frac{(\alpha p) + \beta mc}{p_0} \right) (\alpha e^4) \left(1 + \frac{(\alpha p) + \beta mc}{p_0} \right) \end{aligned} \right.$$

werden nach Spurbildung und Summation über die 6 Fälle μ :

$$(6,3) = \sum_{\text{Perm}} \frac{-8}{p_0^3} \left[(e^1 e^2) (e^3 e^4) - 6 \frac{(pe^1)(pe^2)(e^3 e^4)}{p_0^2} + 5 \frac{(pe^1)(pe^2)(pe^3)(pe^4)}{p_0^4} \right].$$

Um den Vergleich dieses gewöhnlichen Gliedes mit dem Subtraktionsglied (5,9) durchzuführen, formt man es nach Heisenberg um in eine totale Ableitung

$$(6,4) \quad \left\{ \begin{aligned} & = \frac{8}{3} \sum_{\text{Perm}} \left(e^1 \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(e^2 \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(e^3 \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(e^4 \frac{\partial}{\partial p} \right) p_0, \\ & \left(\left(e^1 \frac{\partial}{\partial p} \right) = e_x^1 \frac{\partial}{\partial p_x} + e_y^1 \frac{\partial}{\partial p_y} + e_z^1 \frac{\partial}{\partial p_z} \right) \end{aligned} \right.$$

und geht vom Matrixelement (6,4) zur entsprechenden (in $\xi \pm r$) gemischten Energiedichte über:

$$\begin{aligned} & C \int d\mathbf{p} \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} \rightarrow C \int e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} d\mathbf{p} \\ & = \frac{8}{3} C \sum_{\text{Perm}} \int e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \left(e^1 \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(e^2 \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(e^3 \frac{\partial}{\partial p} \right) e^4 \left(\frac{\partial}{\partial p} \right) p_0 d\mathbf{p} \\ & = -\frac{64\pi}{3} C \sum_{\text{Perm}} \frac{(e^1 r)(e^2 r)(e^3 r)(e^4 r)}{|\mathbf{r}|^4} = -(g^1 g^2 |V^4| - g^3 - g^4). \end{aligned}$$

$\left[\int p_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{p} = -\frac{8\pi \hbar^4}{|\mathbf{r}|^4} \text{ wenn man das Integral künstlich konvergent macht, und für } |\mathbf{r}| \ll \frac{\hbar}{mc} \text{ berechnet.} \right]$ Damit ist die Be-

hauptung bewiesen: In nullter Ordnung der Entwicklung nach Lichtfrequenzen gibt es infolge des Subtraktionsgliedes V^4 keine Streuung von Licht an Licht.

Würde das Heisenbergsche Glied (5,9) nicht zum gewöhnlichen Matricelement addiert, so ergäbe die Diracsche Theorie eine für genügend lange Wellen beliebig große Streuung von Licht an Licht im Widerspruch zur Erfahrung (5,9; 5,10).

§ 7. **Nachweis der Identität der aus der Diracschen Theorie folgenden Matrix H_{in}^4 mit der oben aufgestellten Wechselwirkungsenergie \bar{U}_1 der Lichtquanten**

Es kann nun leicht gezeigt werden, daß die eben aufgestellte Matrix H_{in}^4 der Diracschen Theorie (5,13), deren Übergangselemente die Streuung von Licht an Licht beschreiben, mit der früher angeschriebenen Wechselwirkung der Lichtquanten (2,21) identisch ist:

a) Das Matricelement H_{in}^4 (5,13; 5,14; 5,15) der Diracschen Theorie kann als einfaches Integral $\int dV$ über ein Produkt der vier ebenen Lichtwellen (5,2): $\mathfrak{A}_{g^1} \mathfrak{A}_{g^2} \mathfrak{A}_{g^3} \mathfrak{A}_{g^4} = e^4 e^{\frac{i}{\hbar} (g^4 \bar{\varepsilon})} \cdot \sqrt{\frac{c \hbar \hbar}{|g^4| V}}$ geschrieben werden:

Denn wegen des Impulssatzes $g^1 + g^2 + g^3 + g^4 = 0$ ist

$$(7,1) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{in}^4 &= \frac{e^4}{16c^3 \hbar^3} \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \text{Spur} \int d\mathfrak{p} \int dV \\ &\cdot (\alpha \mathfrak{A}_{g^1}) \left(\frac{1 - \frac{(\alpha, \mathfrak{p} + g^1) + \beta mc}{(\mathfrak{p} + g^1)_0}}{p_0 + (\mathfrak{p} + g^1)_0 - g^1} \right) (\alpha \mathfrak{A}_{g^2}) \left(\frac{1 - \frac{(\alpha, \mathfrak{p} + g^1 + g^2) + \beta mc}{(\mathfrak{p} + g^1 + g^2)_0}}{p_0 + (\mathfrak{p} + g^1 + g^2)_0 - g^1 - g^2} \right) \\ &\cdot (\alpha \mathfrak{A}_{g^3}) \left(\frac{1 - \frac{(\alpha, \mathfrak{p} - g^4) + \beta mc}{(\mathfrak{p} - g^4)_0}}{p_0 + (\mathfrak{p} - g^4)_0 + g^4} \right) (\alpha \mathfrak{A}_{g^4}) \left(1 + \frac{(\alpha \mathfrak{p}) + \beta mc}{p_0} \right) + V_{in}^4. \end{aligned} \right.$$

b) Dieses zusammengesetzte Matricelement H_{in}^4 kann als einfaches Matricelement einer Funktion \bar{U} des Strahlungsfeldes aufgefaßt werden, welche das Integral über einen Ausdruck in den Potentialen und ihren (mit \hbar/mc multiplizierten) Ableitungen ist. Dem Grad der Ableitungen entspricht die Ordnung der Entwicklung nach Lichtquantenenergien:

Denn denkt man sich im ersten Teil von (7,1) die Spurbildung, Integration über \mathfrak{p} , Summation über μ ausgeführt und nach Lichtquantenenergien g^i/mc entwickelt, so entsteht ein Ausdruck der Form:

$$\begin{aligned}
 H_{in}^4 &= \frac{e^4}{16c^3\hbar^3} \sum_{\text{Perm}} \int dV \left[\mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \frac{g^1}{mc} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{g^1}{mc} \frac{g^2}{mc} \frac{g^3}{mc} \frac{g^4}{mc} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \dots \right] + V_{in}^4 \\
 &= \frac{e^4}{16c^3\hbar^3} \sum_{\text{Perm}} \int dV \left[\mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \left(\frac{\hbar}{mc} \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{A} \right) \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \dots \right. \\
 (7,2) \quad &\quad \left. + \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{A} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{A} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{A} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{A} \right) + \dots \right] + V_{in}^4 \\
 &= (g^1 g^2 \int U_1 dV - g^3 - g^4) \quad \text{mit} \\
 U_1 &= \frac{e^4}{16c^3\hbar^3} \left[\mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \frac{\hbar}{mc} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Darin ist das Heisenbergsche Glied

$$\begin{aligned}
 V^4 &= \frac{-1}{12\pi^2} \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{\hbar c} \lim_{r \rightarrow 0} \int \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{s} \cdot \mathbf{r})^4}{|\mathbf{r}|^4} dV \\
 &\rightarrow - \frac{1}{12\pi^2} \frac{e^4}{\hbar^3 c^3} \cdot \frac{1}{5} \int (\mathfrak{A} \mathfrak{A}) (\mathfrak{A} \mathfrak{A}) dV
 \end{aligned}$$

mit enthalten, wenn man die Limesbildung $r \rightarrow 0$ durch Winkel-
mittelung über \mathbf{r} ausführt.

c) Die Glieder, welche die Potentiale \mathfrak{A} direkt enthalten und sich nicht durch Feldstärken F_{ik} ausdrücken lassen, also (u. a.) die *Entwicklungsglieder nullter, 1., 2., 3. Ordnung nach Lichtfrequenzen* müssen verschwinden.

Denn da die Voraussetzungen, von denen diese Rechnungen ausgehen, eichinvariant sind, müssen es auch die Resultate sein, d. h. es können nur die Kombinationen aus den Ableitungen der Potentiale vorkommen, welche Feldstärken oder Ableitungen von Feldstärken bedeuten.

Das Verschwinden des nullten Entwicklungsgliedes von H_{in}^4 nach g/mc , welches durch Kompensation mit dem Heisenbergschen Glied V_{in}^4 zustande kam, ist damit aus den Forderungen der Eichinvarianz verständlich, welche ja auch der Grund für das Glied V^4 war. Das Verschwinden der 1., 2. und 3. Ordnung in der Entwicklung nach g/mc soll später (§ 9) für die 1. Ordnung allgemein, für die 2. und 3. Ordnung an einigen Spezialfällen durch direktes Ausrechnen bestätigt werden.

Also bleibt von unserem Ausdruck (7,2) nur

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{e^4}{16c^3\hbar^3} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\hbar}{mc} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

oder

$$(7,3) \quad U_1 = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \frac{1}{16 \cdot (2\pi)^2} \left[F F F F + \frac{\hbar}{mc} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\hbar}{mc} \frac{\partial F}{\partial x} F F + \dots \right]$$

übrig und es ist

$$(7,4) \quad H_{in}^4 = \left(g^1 g^2 \left| \int U_1 dV \right| - g^3 - g^4 \right),$$

d. h. die Wechselwirkung der Lichtquanten kann in der Tat durch ein anschauliches Gesetz beschrieben werden und dies ist für weiches Licht von der oben erwarteten Form (1,4), also aus Invarianzgründen von der Form (2,21).

Wir verzichten dabei auf Glieder höherer als 4. Ordnung in der Entwicklung nach Lichtquantenenergien, also auf die Glieder mit den Ableitungen der Feldstärken, ferner, wie schon durch die Art der Störungsrechnung vorgeschrieben ist, auf Glieder höherer als 4. Ordnung in der Entwicklung der Feldgleichungen nach der Elektronenladung, d. h. auf höhere als 4. Potenzen in den Feldstärken, d. h. wir beschränken uns auf nicht zu starke und nicht zu schnell veränderliche Felder, in denen keine Paare erzeugt werden können und von denen außerdem vorausgesetzt ist, daß sie keine Elektronen enthalten, die an der Strahlung teilnehmen.

$$(7,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\text{Feldstärke klein gegen die Feldstärke am Rand des Elektrons:} \right. \\ \quad \left. |F_{ik}| \ll E_0, \right. \\ \text{Wellenlängen groß gegen die Comptonwellenlänge d. h. als} \\ \text{invariante Bedingung (0,1; 5,2):} \\ \quad \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial t} \right)^2 \ll 2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 (F_{ik})^2 \end{array} \right.$$

III. Teil

§ 8. Ausrechnung des Matrixelementes für Streuung von Licht an Licht (im Glied 4. Ordnung der Entwicklung nach Lichtfrequenzen) für zwei Spezialfälle zur Bestimmung der Zahlenkoeffizienten α , β in der Wechselwirkung von Licht mit Licht

$$\left(\alpha = -\frac{1}{360 \pi^2}, \quad \beta = -\frac{7}{360 \pi^2} \right)$$

Bisher wurde die Wechselwirkung der Lichtquanten bis auf zwei Konstanten α , β bestimmt (2,21). Um diese beiden Konstanten auszurechnen, betrachten wir jetzt einen speziellen Prozeß, in welchen zwei Lichtquanten gleicher Energie und entgegengesetzter Impulse aufeinander stoßen und ihre Impulse austauschen (oder, was hiervon nicht unterschieden werden kann, ungestreut durcheinander hindurchgehen).

Die Polarisationen der beiden primären Quanten sollen einander gleich sein, ebenso die der sekundären. Um zwei Konstanten zu berechnen, brauchen wir zwei Spezialisierungen: In der ersten a) möge die Polarisation der

primären Lichtquanten senkrecht auf der Polarisation der sekundären stehen, im zweiten Fall b) mögen alle vier Lichtquanten dieselbe Polarisation haben.

Mit der Bezeichnung:

$$g^1 = g, \quad g^1 = g$$

soll also sein:

$$(8,1) \quad \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} g^1 = +g & g^2 = -g \\ \hline g^3 = +g & g^4 = -g \end{array} \quad \begin{array}{c|c} g^1 = +g & g^2 = +g \\ \hline g^3 = -g & g^4 = -g \end{array} \quad \text{II}$$

und in einem Koordinatensystem, in dessen x -Achse der Vektor g liegt, soll gelten:

	im Spezialfall a):	im Spezialfall b):
(8,2)	$\begin{array}{l} \parallel \text{ Impulse und } \perp \text{ Polarisationen} \\ (x) \quad (y) \quad (z) \\ g = (g, 0, 0) \\ e^1 = e^2 = (0, 1, 0) \\ e^3 = e^4 = (0, 0, 1) \end{array}$	$\begin{array}{l} \parallel \text{ Impulse und } \parallel \text{ Polarisationen} \\ (x) \quad (y) \quad (z) \\ g = (g, 0, 0) \\ e^1 = e^2 = (0, 1, 0) \\ e^3 = e^4 = (0, 1, 0) \end{array}$

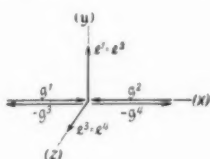


Fig. 2

Wir rechnen nun für diese zwei Spezialfälle [(8,2a), (8,2b)] das Diracsche Matricelement \hat{H}_{in}^4 [(5,13), (5,14), (5,15)] (im Glied 4. Ordnung der Entwicklung nach Lichtfrequenzen g^1/mc) und das Matricelement der Feldfunktion \bar{U}_1 (2,21) aus, setzen beide einander gleich:

$$(8,3) \quad H_{in}^4 = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \left(g^1 g^2 \left| \int [\alpha (\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}^2)^2 + \beta (\mathcal{D} \mathcal{B})^2] dV \right| - g^3 - g^4 \right)$$

und erhalten dadurch zwei lineare Bestimmungsgleichungen für die Konstanten α und β .

(Dabei ist allerdings die Definition des Spezialfalles, in welchem der Endzustand $-g^3, -g^4$ gleich dem Anfangszustand g^1, g^2 ist, in dem also gar keine wirkliche Streuung stattfindet, nicht wörtlich zu nehmen. Sie muß vielmehr so aufgefaßt werden, daß die Endlichtquanten $-g^3, -g^4$ nur relativ wenig von den Anfangslichtquanten g^1, g^2 abweichen, daß nach dieser Abweichung entwickelt wird und daß die Glieder nullter Ordnung dieser Entwicklung verglichen werden.)

Zunächst berechnen wir die Matricelemente der Feldfunktionen \bar{U}_1 (2,21) für die beiden Spezialfälle (8,2a), (8,2b):

$$\begin{pmatrix} [\dots] & \text{Vektorprodukt} \\ (\dots) & \text{Skalares Produkt} \\ [\dots] & \text{Determinante} \end{pmatrix}.$$

<p>(8.4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nach } (5.2), (5.3) \\ (2.2), (2.6) \end{array} \right\}$ ist das Matrixelement der Feldfunktionen:</p>	$\frac{1}{D} (g^1 g^2) \int (8^2 \mathfrak{D})^2 dV \left -g^3 - g^4 \right $	$\frac{1}{D} (g^1 g^2) \int (8^2 - \mathfrak{D})^2 dV \left -g^3 - g^4 \right $
<p>(8.5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleich:} \\ \text{Darin bedeutet } D \text{ die Konstante} \\ D = \left(\frac{c h}{V} \right)^2 \frac{1}{\hbar^4} \frac{V}{g^1 g^2 g^3 g^4} \end{array} \right\}$</p>	$\sum_{\text{Fermi}} e^1 e^2 g^2 e^3 e^4 g^4 g^1 g^3$	$\begin{aligned} & \sum_{\text{Fermi}} (e^1 e^2) (e^3 e^4) g^1 g^3 g^2 g^4 \\ & - 2 \sum_{\text{Fermi}} (e^1 e^2) g^1 g^2 ([e^3 g^3] [e^4 g^4]) \\ & + \sum_{\text{Fermi}} ([e^1 g^1] [e^2 g^2]) ([e^3 g^3] [e^4 g^4]) \end{aligned}$
<p>(8.5') $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dies wird im Fall } \perp \text{ Polarisationen:} \\ (x) \quad (y) \quad (z) \\ e^1 = e^2 = (0, 1, 0) \\ e^3 = e^4 = (0, 0, 1) \end{array} \right\}$</p>	$\begin{aligned} \Psi = 2 \left[\begin{array}{l} 2 g^1 g^2 g^3 g^4 + 2 g^3 g^4 g^1 g^2 \\ - g^2 g^3 g^4 g^1 - g^1 g^2 g^3 g^4 \\ - g^2 g^3 g^1 g^4 - g^1 g^2 g^4 g^3 \end{array} \right] \end{aligned}$	$\sum_{\text{Fermi}} (e^1 e^2) (e^3 e^4) \left[\begin{array}{l} (g^1 g^3) (g^2 g^4) \\ - 2 (g^1 g^2) g^3 g^4 \\ + g^1 g^2 g^3 g^4 \end{array} \right]$
<p>(8.6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{und bei weiterer Spezialisierung} \\ \text{auf } \parallel \text{ und entgegengesetzte Impulse,} \\ \text{also im Spezialfall (8.2a):} \end{array} \right\}$</p>	$\Psi = -8 g 4$	$\Psi = 32 g 4$
<p>(8.6') $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dagegen im Fall } \parallel \text{ Polarisationen:} \\ (x) \quad (y) \quad (z) \\ e^1 = e^2 = e^3 = e^4 = (0, 1, 0) \end{array} \right\}$</p>	$\Psi = 0$	$\sum_{\text{Fermi}} [(g^1 g^3) (g^2 g^4) - 2 (g^1 g^2) g^3 g^4 + g^1 g^2 g^3 g^4]$
<p>(8.7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{und bei weiterer Spezialisierung} \\ \text{auf } \parallel \text{ und entgegengesetzte Impulse,} \\ \text{also im Spezialfall (8.2b):} \end{array} \right\}$</p>	$\Psi = 0$	$\Psi = 64 g 4$

Damit sind (8,6), (8,7) die Matricelemente der beiden Feldfunktionen (2,21) in den beiden Spezialfällen (8,2a) und (8,2b) ausgerechnet. Wie man sieht, sind die Übergänge a) paralleler Polarisation durch das Wechselwirkungsglied $(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{B}^2)^2$ allein bestimmt. Das andere Glied $(\mathfrak{D} \mathfrak{B})^2$ gibt hier keinen Beitrag, weil bei einer ebenen Welle $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{B}$ ist. Zu den Übergängen b) senkrechter Polarisation aber tragen beide Wechselwirkungsglieder $(\mathfrak{D} \mathfrak{B})^2$ und $(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{B}^2)^2$ bei, weil darin sowohl senkrechte wie parallele Polarisationen kombiniert werden können.

Wir müssen nun das Matricelement H_{in}^4 [(5,13), (5,14), (5,15)] der Dirac'schen Theorie für dieselben zwei Übergänge (8,2a, b) ausrechnen, und behandeln zunächst die Summation \sum_{Perm} über die 24 Reihenfolgen der Lichtquanten, die darin vorkommen.

Zwischen den Lichtquanten ist durch die Spezialisierung (8,2a, b) eine Symmetrie hergestellt, die es erlaubt, die Summe über einige ihrer Permutationen leicht auszuführen:

Wie (8,1), (8,2) zeigt, hängt das Matricelement nur noch vom Vektor g und von der Zahl g ab und die Vertauschung

- I von g^1 mit g^2 und von g^3 mit g^4 bedeutet im Matricelement einen Wechsel des Vorzeichens von g $g \rightarrow -g$,
aber Bestehenbleiben des Vorzeichens von g $g \rightarrow +g$,
und Bestehenbleiben der Polarisationen $p_y \rightarrow p_y, p_z \rightarrow p_z$.

Die Vertauschung

- II von g^1 mit g^3 und von g^2 mit g^4 dagegen:
Bestehenbleiben des Vorzeichens von g $g \rightarrow +g$,
Wechsel des Vorzeichens von g $g \rightarrow -g$,
und Vertauschung der Polarisationen $p_y \rightarrow p_z, p_z \rightarrow p_y$.

Die Vierergruppe von Vertauschungen, die von diesen Permutationen I, II erzeugt wird (I, II, Produkt I · II, Identität), kann also in den Formeln schematisch ausgeführt werden. Die sechs Rest-„Klassen“ aller 24 Permutationen nach diesen vier aber müssen einzeln ausgerechnet werden. Sie können repräsentiert werden durch die folgenden sechs Reihenfolgen der Lichtquanten, zu denen bestimmte Reihenfolgen der Polarisationen und bestimmte Zwischenzustände der Elektronen gehören.

8,8 α				8,8 β				8,8 γ				8,8 δ				8,8 ϵ			
Reihenfolge der Lichtquanten	Polarisationen im Fall a) in (5,15)				Polarisationen im Fall b) einzusetzen				Zwischenzustände in (5,14), (5,15) einzusetzen										
	e ¹	e ²	e ³	e ⁴	e ¹	e ²	e ³	e ⁴	p ¹	p ²	p ³	p ⁴	g ¹	g ²	g ³	g ⁴			
(8,8)	$g^1 g^2 g^3 g^4$	y	y	z	z	y	y	y	y	p+g	p	p+g	p	g	g	-g	-g		
	$g^1 g^2 g^4 g^3$	y	y	z	z	y	y	y	y	p+g	p	p+g	p	g	g	-g	-g		
	$g^1 g^3 g^4 g^2$	y	z	z	y	y	y	y	y	p+g	p+2g	p+g	p	g	-g	-g	+g		
	$g^1 g^3 g^2 g^2$	y	z	z	y	y	y	y	y	p+g	p	p+g	p	g	-g	-g	+g		
	$g^1 g^4 g^2 g^3$	g	z	y	z	y	y	g	y	p+g	p	p+g	p	g	-g	g	-g		
	$g^1 g^3 g^4 g^2$	y	z	y	z	y	y	y	y	p+g	p+2g	p+g	p	g	-g	g	-g		

Das Matricelement (5,13) ist eine Summe von Produkten aus Zählern Z_μ , welche die zusammengesetzten Matricelemente (5,15), und reziproken Nennern $1/N_\mu$, welche Energiedifferenzen bedeuten (5,14).

Schon in den Zählern kann über die Permutation der Polarisierungen (II: $p_y \rightarrow p_z$, $p_z \rightarrow p_y$) summiert werden, weil die Polarisationsrichtungen p_y und p_z nur im Zähler und nicht in den Nennern vorkommen und weil die nachfolgende Mittelung über die Winkel von p diese beiden Polarisationsrichtungen nicht unterscheidet ($p_y^2 p_z^2 = p_z^2 p_y^2$). Man kann also schon im Zähler $p_y^2 = p_z^2$ setzen (in Ausdrücken 2. Ordnung von g).

Über die Permutation der Lichtquantenenergien kann schon im reziproken Nenner $1/N_\mu$ (5,14) summiert werden, weil sie im Zähler (5,15) nicht vorkommen, d. h. man kann nach Ausrechnung der reziproken Nenner alle ungeraden Potenzen von g streichen.

Die Permutation der Impulse aber (I: $g \rightarrow -g$) kann erst nach Multiplikation der Zähler mit den reziproken Nennern durchgeführt werden, weil g in beiden vorkommt, d. h. bei dieser Multiplikation sind alle ungeraden Potenzen von g fortzulassen.

Nach diesen Vereinfachungen besteht dann die Summation \sum_{Perm} über

die 24 Lichtquantenpermutationen nur noch: in der Summation des Matricelements über die sechs Reihenfolgen (8,8) und der Multiplikation des Resultats mit dem Faktor 4.

Die reziproken Nenner $1/N_\mu$ werden, wie man durch Einsetzen der Spezialisierung (8,8, e) in (5,14), Entwicklung nach Lichtfrequenzen g/mc , g/mc bis zur 4. Ordnung und Streichen der ungeraden Potenzen von g findet:

(Die Zahl in der i ten Zeile und der k ten Spalte der Tabelle bedeutet den Beitrag des Entwicklungsgliedes, das ganz oben in der k ten Spalte steht, für den Ausdruck, der ganz links in der i ten Zeile steht.)

Vgl. Gl. (8,9).

Für die Zähler des Matricelements im Fall a) erhält man, indem man zur Spezialisierung auf \perp Polarisierungen (8,8, β) in (5,15) einsetzt, die Spur bildet und in den in p quadratischen Gliedern p_x^2 durch p_y^2 ersetzt:

Für die Reihenfolge: $g^1 g^2 g^3 g^4$ und $g^1 g^3 g^4 g^2$

$$Z_\mu = S_1 + 2p_y^2 \left[\frac{\lambda_\mu^3}{p_0^1 p_0^2} - \frac{\lambda_\mu^2}{p_0^3 p_0^4} - \frac{\lambda_\mu^2 \lambda_\mu^3}{p_0^1 p_0^4} + \frac{1}{p_0^2 p_0^3} - \frac{2\lambda_\mu^2}{p_0^1 p_0^3} \right] - \frac{1}{p_0^1 p_0^2 p_0^3 p_0^4} \left[S_2 + 8p_y^2 p_z^2 + 2p_y^2 [-(p^1 p^2) - (p^3 p^4) - (p^2 p^3) - (p^1 p^4) + 2(p^2 p^4) - 2(mc)^2] \right].$$

Für die Reihenfolge: $g^1 g^3 g^2 g^4$ und $g^1 g^4 g^3 g^2$

$$Z_\mu = S_1 + 2p_y^2 \left[\frac{\lambda_\mu^3}{p_1^1 p_0^2} - \frac{\lambda_\mu^2}{p_0^3 p_0^4} - \frac{\lambda_\mu^2 \lambda_\mu^3}{p_0^1 p_0^4} + \frac{1}{p_0^2 p_0^3} + \frac{2\lambda_\mu^3}{p_0^2 p_0^4} \right] - \frac{1}{p_0^1 p_0^2 p_0^3 p_0^4} \left[S_2 + 8p_y^2 p_z^2 + 2p_y^2 [-(p^1 p^2) - (p^3 p^4) - (p^2 p^3) - (p^1 p^4) + 2(p^1 p^3) - 2(mc)^2] \right].$$

Gl. (8,9)

Reihen- folge	Reziproker Nenner	$\frac{1}{p_0^3}$	$\frac{1}{2} \frac{(p \ g)}{p_0^5}$	$\frac{1}{4} \frac{g^2}{p_0^5}$	$\frac{1}{4} \frac{(p \ g)^2}{p_0^7}$	$\frac{1}{8} \frac{(p \ g) \ g^2}{p_0^7}$	$\frac{(p \ g)^3}{8 p_0^9}$	$\frac{g^4}{16 p_0^7}$	$\frac{(p \ g)^2 g^2}{16 p_0^9}$	$\frac{(p \ g)^4}{16 p_0^{11}}$
$g^1 g^2 g^3 g^4$	$\frac{1}{N_1} =$	1	-2	9	5	-22	-14	30	56	42
	$\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} =$	2	-6	8	20	-10	-70	32	-28	252
	$\frac{1}{N_4} =$	1	-4	-3	15	24	-56	10	-140	210
	$\frac{1}{N_5} + \frac{1}{N_6} =$	1	-3	-1	9	8	-28	2	-44	90
$g^1 g^2 g^4 g^3$	$\frac{1}{N_1} =$	1	0	9	3	0	0	30	28	22
	$\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} =$	2	0	8	8	0	0	32	0	64
	$\frac{1}{N_4} =$	1	-2	-3	7	10	-18	10	-60	66
	$\frac{1}{N_5} + \frac{1}{N_6} =$	1	-1	-1	5	4	-8	2	-28	42
$g^1 g^3 g^4 g^2$	$\frac{1}{N_1} =$	1	-4	-5	17	48	-80	38	-372	414
	$\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} =$	2	-12	-4	68	72	-392	44	-840	2332
	$\frac{1}{N_4} =$	1	-6	3	33	-18	-182	-18	28	1030
	$\frac{1}{N_5} + \frac{1}{N_6} =$	1	-5	-5	25	56	-132	34	-484	738
$g^1 g^4 g^3 g^2$	$\frac{1}{N_1} =$	1	-2	-1	5	6	-14	2	-28	42
	$\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} =$	2	-6	8	20	-50	-70	-8	252	252
	$\frac{1}{N_4} =$	1	-4	7	15	-48	-56	-6	252	210
	$\frac{1}{N_5} + \frac{1}{N_6} =$	1	-3	-1	9	8	-28	2	-44	90
$g^1 g^4 g^2 g^3$	$\frac{1}{N_1} =$	1	0	1	3	0	0	-2	-4	22
	$\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} =$	2	0	-4	8	0	0	12	-60	64
	$\frac{1}{N_4} =$	1	-2	-1	7	2	-18	2	-28	66
	$\frac{1}{N_5} + \frac{1}{N_6} =$	1	-1	3	5	-4	-8	-6	12	42
$g^1 g^3 g^2 g^4$	$\frac{1}{N_1} =$	1	-4	-3	17	36	-80	26	-312	414
	$\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} =$	2	-12	-16	68	192	-392	144	-1740	2332
	$\frac{1}{N_4} =$	1	-6	-5	33	62	-182	30	-564	1030
	$\frac{1}{N_5} + \frac{1}{N_6} =$	1	-5	-1	25	24	-132	2	-276	738

Reihen- folge	Zähler	1			$\frac{(p\ g)}{p_0^2}$			$\frac{ g ^2}{p_0^2}$			$\frac{(p\ g)^2}{p_0^4}$		
		1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$
$g^1 g^2 g^3 g^4$	$z_1 =$	0	0	-1	0	4	2	2	0	1	-2	-8	-4
	$z_2 = z_3 =$	0	0	-1	0	4	2	2	0	1	-2	-8	-4
	$z_4 =$	0	4	-1	0	-4	2	2	-4	1	-2	8	-4
	$z_5 = z_6 =$	-8	8	-1	0	-8	2	4	-6	1	-4	14	-4
	$z_7 =$	0	0	-1	0	4	2	2	0	1	-2	-8	-4
$g^1 g^2 g^4 g^3$	$z_1 =$	0	0	-1	0	0	0	-2	0	1	2	0	-2
	$z_2 = z_3 =$	0	0	-1	0	0	0	-2	0	1	2	0	-2
	$z_4 =$	0	4	-1	0	4	0	2	-4	1	-2	8	-2
	$z_5 = z_6 =$	-8	8	-1	0	0	0	4	-6	1	-4	14	-2
	$z_7 =$	0	0	-1	0	0	0	-2	0	1	2	0	-2
$g^1 g^3 g^4 g^2$	$z_1 =$	0	4	-1	0	-12	4	2	-12	3	-2	40	-14
	$z_2 = z_3 =$	0	0	-1	0	0	4	-2	0	3	2	0	-14
	$z_4 =$	0	0	-1	0	0	4	-2	0	3	2	0	-14
	$z_5 = z_6 =$	-8	8	-1	0	-16	4	4	-14	3	-4	46	-14
	$z_7 =$	0	4	-1	0	-12	4	2	-12	3	-2	40	-14
$g^1 g^4 g^3 g^2$	$z_1 =$	0	4	-1	0	-4	2	2	-4	1	-2	8	-4
	$z_2 = z_3 =$	0	0	-1	0	-4	2	2	-4	1	-2	8	-4
	$z_4 =$	0	0	-1	0	-4	2	2	-4	1	-2	8	-4
	$z_5 = z_6 =$	-8	8	-1	0	-8	2	4	-6	1	-4	14	-4
	$z_7 =$	0	4	-1	0	-4	2	2	-4	1	-2	8	-4
$g^1 g^4 g^2 g^3$	$z_1 =$	0	0	-1	0	0	0	2	-4	1	-2	4	-2
	$z_2 = z_3 =$	0	4	-1	0	0	0	2	-4	1	-2	4	-2
	$z_4 =$	0	0	-1	0	-4	0	-2	0	1	2	-4	-2
	$z_5 = z_6 =$	8	-8	-1	0	0	0	-4	2	1	4	-10	-2
	$z_7 =$	0	0	-1	0	0	0	2	-4	1	-2	4	-2
$g^1 g^3 g^2 g^4$	$z_1 =$	0	0	-1	0	4	4	-2	4	3	2	-20	-14
	$z_2 = z_3 =$	0	4	-1	0	-8	4	2	-8	3	-2	20	-14
	$z_4 =$	0	0	-1	0	0	4	2	-4	3	-2	4	-14
	$z_5 = z_6 =$	8	-8	-1	0	16	4	-4	10	3	4	-42	-14
	$z_7 =$	0	0	-1	0	4	4	-2	4	3	2	-20	-14

Für die Reihenfolge: $g^1 g^4 g^2 g^3$ und $g^1 g^3 g^2 g^4$

$$Z_{\mu} = -S_1 + 2p_v^2 \left[-\frac{\lambda_{\mu}^3}{p_0^1 p_0^3} + \frac{\lambda_{\mu}^2}{p_0^3 p_0^4} + \frac{\lambda_{\mu}^2 \lambda_{\mu}^3}{p_0^1 p_0^4} - \frac{1}{p_0^2 p_0^3} + \frac{2\lambda_{\mu}^2}{p_0^1 p_0^3} - \frac{2\lambda_{\mu}^3}{p_0^2 p_0^4} \right] \\ - \frac{1}{p_0^1 p_0^2 p_0^3 p_0^4} \left[-S_2 + 2p_v^2 [(p^1 p^2) + (p^3 p^4) + (p^2 p^3) + (p^1 p^4) - 2(p^1 p^3) - 2(p^1 p^4)] \right].$$

Darin bedeuten S_1, S_2 die Abkürzung:

$$S_1 = \lambda_{\mu}^2 \lambda_{\mu}^3 - \lambda_{\mu}^3 \frac{(p^1 p^2) + (m c)^2}{p_0^1 p_0^3} + \lambda_{\mu}^2 \frac{(p^3 p^4) + (m c)^2}{p_0^3 p_0^4} - \lambda_{\mu}^3 \frac{(p^2 p^3) + (m c)^2}{p_0^2 p_0^4} \\ + \lambda_{\mu}^2 \lambda_{\mu}^3 \frac{(p^1 p^4) + (m c)^2}{p_0^1 p_0^4} - 1 \cdot \frac{(p^2 p^3) + (m c)^2}{p_0^2 p_0^3} + \lambda_{\mu}^2 \frac{(p^1 p^3) + (m c)^2}{p_0^1 p_0^3},$$

GL

(8,10)

$\frac{(p g)^2}{p_0^4}$	$\frac{(p g)^2}{p_0^4}$			$\frac{(p g)^2}{p_0^4}$			$\frac{ g ^4}{p_0^4}$			$\frac{(p g)^2 g ^2}{p_0^6}$			$\frac{(p g)^4}{p_0^8}$		
	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2p_v^2}{p_0^2}$	$\frac{8p_v^2 p_z^2}{p_0^4}$
-4	-4	-4	-4	4	16	8	-2	0	-1	10	16	12	-8	-32	-16
-4	-4	-4	-4	4	16	8	-2	0	-1	10	16	12	-8	-32	-16
-4	-4	12	-4	4	-16	8	-2	4	-1	10	-32	12	-8	+32	-16
-4	-8	18	-4	+8	-26	8	-2	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$	19	-47	12	- $\frac{31}{2}$	$\frac{99}{2}$	-16
-2	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	-6	0	6	4	0	-6
-2	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	-6	0	6	4	0	-6
-2	4	-6	0	-4	10	0	-2	4	-1	10	-24	6	-8	24	-6
-2	0	0	0	0	0	0	-2	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$	19	-39	6	- $\frac{31}{2}$	$\frac{83}{2}$	-6
-14	-12	78	-22	12	-138	48	-10	38	-9	66	-402	118	-56	488	-166
-14	8	0	-22	-8	0	48	6	0	-9	-34	0	118	28	0	-166
-14	8	0	-22	-8	0	48	6	0	-9	-34	0	118	28	0	-166
-14	-16	84	-22	16	-148	48	-2	$\frac{23}{2}$	$\frac{79}{2}$	75	-417	118	- $\frac{127}{2}$	$\frac{1011}{2}$	-166
-4	-4	12	-4	4	-16	8	-2	4	-1	10	-32	12	-8	32	-16
-4	-4	12	-4	4	-16	8	-2	4	-1	10	-32	12	-8	32	-16
-4	-4	12	-4	4	-16	8	-2	4	-1	10	-32	12	-8	32	-16
-4	-8	18	-4	8	-26	8	-2	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$	19	-47	12	- $\frac{31}{2}$	$\frac{99}{2}$	-16
-2	0	0	0	0	0	0	-2	4	-1	6	-16	6	-4	12	-6
-2	0	0	0	0	0	0	-2	4	-1	6	-16	6	-4	12	-6
-2	-4	6	0	4	-10	0	2	0	-1	-10	8	6	8	-12	-6
-2	0	0	0	0	0	0	2	$\frac{3}{2}$	-1	-19	23	6	$\frac{31}{2}$	$\frac{59}{2}$	-6
-14	12	-38	-22	-12	82	48	10	-18	-9	-66	230	118	56	-316	-166
-14	-8	40	-22	8	-56	48	-6	20	-9	34	-172	118	-28	172	-166
-14	-8	24	-22	8	-24	48	-6	16	-9	34	-124	118	-28	108	-166
-14	16	-60	-22	-16	124	48	23	$\frac{47}{2}$	-9	-75	293	118	$\frac{127}{2}$	$\frac{795}{2}$	-166

$$S_4 = \left[\begin{aligned} &[(p^1 p^3) + (mc)^2] [(p^3 p^4) + (mc)^2] + [(p^2 p^3) + (mc)^2] [(p^1 p^4) + (mc)^2] \\ &- [(p^1 p^3) + (mc)^2] [(p^2 p^4) + (mc)^2] \end{aligned} \right].$$

Diese Ausdrücke werden bei weiterer Spezialisierung auf parallele Impulse, wie man durch Einsetzen von (8,8, δ) und Entwicklung nach g/mc bis zur 4. Ordnung findet:

Vgl. Gl. (8,10).

Um die Zähler (5,15) durch die Nenner (5,14) zu dividieren, über die 6 Übergangswege μ und die 24 Reihenfolgen (8,8, α) zu summieren, muß man die Spalten der Tab. (8,10) mit den entsprechenden Spalten der Tab. (8,9) und mit dem Faktor 4 multiplizieren. Man erhält dann im Glied 4. Ordnung in g/mc nach Mittelung über die Positronenrichtung p : [vgl. § 9,7]

Reihen- folge	Zähler	1			$\frac{(p \ g)}{p_0^2}$			$\frac{ g ^2}{p_0^3}$			$\frac{(p \ g)^2}{p_0^4}$		
		1	$\frac{2 p_0^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_0^4}{p_0^4}$	1	$\frac{2 p_0^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_0^4}{p_0^4}$	1	$\frac{2 p_0^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_0^4}{p_0^4}$	1	$\frac{2 p_0^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_0^4}{p_0^4}$
$g^1 g^3 g^4$ $g^1 g^4 g^3 g^2$	$-z_1 =$	0	-4	1	0	4	-2	-2	4	-1	2	-8	4
	$-z_2 = -z_3 =$	0	-4	1	0	4	-2	-2	4	-1	2	-8	4
	$-z_4 =$	0	-4	1	0	4	-2	-2	4	-1	2	-8	4
	$-z_5 = -z_6$	8	-8	1	0	8	-2	-4	6	-1	4	-14	4
$g^1 g^2 g^4 g^3$ $g^1 g^4 g^3 g^2$	$-z_1 =$	0	-4	1	0	0	0	2	4	-1	-2	-8	2
	$-z_2 = -z_3$	0	-4	1	0	0	0	2	4	-1	-2	-8	2
	$-z_4 =$	0	-4	1	0	-4	0	-2	4	-1	2	-8	2
	$-z_5 = -z_6$	8	-8	1	0	0	0	-4	6	-1	4	-14	2
$g^1 g^3 g^4 g^2$ $g^1 g^3 g^2 g^4$	$-z_1 =$	0	-4	1	0	12	-4	-2	12	-3	2	-40	14
	$-z_2 =$	0	-4	1	0	8	-4	2	8	-3	-2	-24	14
	$-z_4 =$	0	-4	1	0	8	-4	2	8	-3	-2	-24	14
	$-z_5 = -z_6$	8	-8	1	0	16	-4	-4	14	-3	4	-46	14

$$(8,11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{\bar{Z}_{\mu}}{N_{\mu}} &= \frac{4 |g|^4}{p_0^7} \\ &\cdot \left[-63 + 1002 \frac{p^2}{3 p_0^2} - 7734 \frac{p^4}{3 \cdot 5 p_0^4} - 315 \frac{p^4}{5 p_0^4} \right. \\ &\quad \left. + 22800 \frac{p^6}{2 \cdot 5 \cdot 7 p_0^6} + 7524 \frac{p^6}{5 \cdot 7 p_0^6} - 47606 \frac{p^8}{5 \cdot 7 \cdot 9 p_0^8} \right] \end{aligned} \right.$$

und nach Integration¹⁾ $4\pi \int p^2 dp$ über die Positronenenergie p_0 :

$$(8,12) \quad \left\{ \begin{aligned} C \int dp \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} &= C \cdot 4\pi \cdot 4 \cdot 2 \left(\frac{g}{mc} \right)^4 \\ &\cdot \left[-\frac{63}{3 \cdot 5} + \frac{1002}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{7734}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{315}{5 \cdot 7 \cdot 9} \right. \\ &\quad \left. + \frac{22800}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{7524}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \frac{47606}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(8,13) \quad = 4\pi \cdot 4 \cdot 2 \left(-\frac{8}{3 \cdot 5} \right) \cdot \left(\frac{g}{mc} \right)^4 \cdot C = H_1.$$

$$1) \int_0^{\infty} \frac{p^m}{p_0^{m+7}} p^2 dp = \frac{2}{(m+3)(m+5)} \frac{1}{(mc)^4}.$$

Gl.

(8,15)

	$\frac{(p \cdot g)}{p_0^4} \frac{(g)^2}{p_0^4}$			$\frac{(p \cdot g)^2}{p_0^6}$			$\frac{ g ^4}{p_0^4}$			$\frac{(p \cdot g)^2 g ^2}{p_0^6}$			$\frac{(p \cdot g)^4}{p_0^8}$		
$8 p_y^4$	1	$\frac{2 p_y^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_y^2}{p_0^4}$	1	$\frac{2 p_y^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_y^4}{p_0^4}$	1	$\frac{2 p_y^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_y^4}{p_0^4}$	1	$\frac{2 p_y^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_y^4}{p_0^4}$	1	$\frac{2 p_y^2}{p_0^2}$	$\frac{8 p_y^4}{p_0^4}$
4	4	-12	4	-4	16	-8	2	-4	1	-10	32	-12	8	-32	16
4	4	-12	4	-4	16	-8	2	-4	1	-10	32	-12	8	-32	16
4	4	-12	4	-4	16	-8	2	-4	1	-10	32	-12	8	-32	16
4	8	-18	4	-8	26	-8	$\frac{7}{2}$	$-\frac{11}{2}$	1	-19	47	-12	$\frac{31}{2}$	$-\frac{99}{2}$	16
2	0	0	0	0	0	0	-2	-4	1	6	24	-6	-4	-24	6
2	0	0	0	0	0	0	-2	-4	1	6	24	-6	-4	-24	6
2	-4	6	0	4	-10	0	2	-4	1	-10	24	-6	8	-24	6
2	0	0	0	0	0	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{11}{2}$	1	-19	39	-6	$\frac{31}{2}$	$-\frac{99}{2}$	6
14	12	-78	22	-12	138	-48	10	-38	9	-66	402	-118	56	-488	166
14	-8	-48	22	8	80	-48	-6	-24	9	+34	240	-118	-28	-280	166
14	-8	-48	22	8	80	-48	-6	-24	9	+34	240	-118	-28	-280	166
14	16	-84	22	-16	148	-48	$\frac{23}{2}$	$-\frac{79}{2}$	9	-75	417	-118	$\frac{127}{2}$	$-\frac{1011}{2}$	166

Ebenso verläuft die Rechnung für den Spezialfall (8,2b): Indem man im Zähler (5,15) für parallele Polarisationen (8,8, γ) die Spur bildet, erhält man:

$$(8,14) \left\{ \begin{aligned} Z_\mu &= S_1 + 2 p_y^2 \left[\frac{\lambda_\mu^2}{p_0^1 p_0^2} - \frac{\lambda_\mu^2}{p_0^3 p_0^4} - \frac{\lambda_\mu^2 \lambda_\mu^2}{p_0^1 p_0^4} + \frac{1}{p_0^2 p_0^3} \right] \\ &- \frac{1}{p_0^1 p_0^2 p_0^3 p_0^4} \left[S_2 + 8 p_y^4 \right. \\ &\quad \left. - 2 p_y^2 [(p^1 p^2) + (p^2 p^4) + (p^2 p^3) + (p^1 p^4) + 4(m c)^4] \right] \end{aligned} \right\}$$

(S_1, S_2 vgl. S. 432).

Und dies wird, wenn man zur weiteren Spezialisierung auf parallele Impulse (8,8, δ) einsetzt und nach Lichtquantenenergien g/mc , entwickelt:

Vgl. Gl. (8,15).

Multiplikation dieser Zähler (8,15) mit den entsprechenden Nennern (8,9), Addition über die 6 Reihenfolgen (8,8) und die 6 Fälle μ , Multiplikation mit 4 und Mittelung über die Winkel von p ergibt im Glied 4. Ordnung der Entwicklung nach Lichtfrequenzen:

$$(8,16) \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \sum_{\text{Perma}} \sum_{\mu} \frac{Z_\mu}{N_\mu} \\ & = 4 \frac{|g|^4}{p_0^7} \left[\frac{41}{2} - 917 \frac{p^2}{3 p_0^2} + \frac{2379}{2} \frac{p^4}{5 p_0^4} + 8400 \frac{p^4}{3 \cdot 5 \cdot p_0^4} \right. \\ & \quad \left. - 26316 \frac{p^6}{5 \cdot 7 p_0^6} + 23803 \frac{p^8}{3 \cdot 5 \cdot 7 p_0^8} \right] \end{aligned} \right\}$$

und dies wird nach Integration über p :

$$(8,17) \quad \left\{ \begin{aligned} & C \int d\mathfrak{p} \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} \\ & = C \cdot 4\pi (-2) \cdot 4 \cdot 2 \left(\frac{g}{mc} \right)^4 \left[\begin{aligned} & \frac{41}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{917}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2379}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \\ & + \frac{8400}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{26316}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{23803}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(8,18) \quad = -4\pi \cdot 16 \cdot \left(-\frac{32}{5 \cdot 9} \right) \left(\frac{g}{mc} \right)^4 \cdot C = H_{\parallel}^4.$$

Nun sind die Matricelemente der Diracschen Theorie (8,13; 8,18) in ihren Gliedern 4. Ordnung und die Matricelemente der Lichtquantenwechselwirkung (8,6; 8,7) für die beiden betrachteten Übergänge (8,2a, b) ausgerechnet.

Ihre Gleichsetzung (8,3):

$$a) \perp: (32\alpha - 8\beta) |g|^4 D \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} = \frac{-4\pi \cdot 6 \cdot 32}{5 \cdot 9} \left(\frac{g}{mc} \right)^4 C$$

$$b) \parallel: (64\alpha) |g|^4 D \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} + \frac{4\pi \cdot 16 \cdot 32}{5 \cdot 9} \left(\frac{g}{mc} \right)^4 C$$

bestimmt die beiden Konstanten α, β zu

$$(8,19) \quad \boxed{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{360\pi^2} \\ \beta &= -\frac{7}{360\pi^2} \end{aligned}}$$

Die Einfachheit des Resultats legt die Vermutung nahe, daß es möglich sein muß, auf einem einfacheren Wege zu dem hier abgeleiteten Ergebnis zu kommen. Dieser einfachere Weg wird in einer inzwischen erschienenen Arbeit besprochen¹⁾.

§ 9. Bestätigung des Verfahrens

Im vorigen Paragraphen wurden zwei Konstanten α, β so bestimmt, daß das Diracsche Matricelement H_{in}^4 für Streuung von Licht an Licht (im Gliede 4. Ordnung der Entwicklung nach Lichtfrequenzen g/mc) in zwei speziellen Fällen (8,2a, b) durch den Ausdruck (2,21):

$$(9,1) \quad \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \int [\alpha (\mathfrak{B} \mathfrak{D})^2 + \beta (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2)^2] dV$$

dargestellt wird.

Die Möglichkeit dieser Bestimmung beruht nur auf der Tatsache, daß beide Ausdrücke zu den betrachteten 2 Übergängen ein nichtverschwindendes Matricelement geben.

Die Behauptung aber, auf welche es ankommt, daß (9,1) für alle Fälle (bis einschließlich zur 4. Ordnung in g/mc) die Streuung von Licht an Licht vollständig darstellt, enthält die Voraussetzung, daß es überhaupt einen korrespondenzmäßigen Ausdruck für die Streuung von Licht an Licht gibt, daß (wegen dessen Eichinvarianz) die Entwicklungsglieder 1., 2. und 3. Ordnung des Diracschen Matricelements H_{in}^4 nach Lichtfrequenzen immer verschwinden und daß (wegen seiner Lorentzinvarianz) das Glied 4. Ordnung dieser Entwicklung des Diracschen Matricelements von der Form (9,1) ist.

Diese Voraussetzung und die daraus folgende Behauptung, daß wir auch

1) W. Heisenberg u. H. Euler, Ztschr. f. Phys. 98. S. 714. 1936.

ohne Spezialisierung bei Durchrechnung des Diracschen Matricelements für 4 beliebige Lichtquanten das Resultat (9,1) erhalten hätten, soll jetzt durch einige numerische Rechnungen kontrolliert werden.

Wir berechnen in der Entwicklung des Diracschen Matricelements nach Lichtfrequenzen:

1. die 1. Näherung allgemein,
2. die 2. Näherung unter einer einschränkenden Voraussetzung über die Polarisationen,
3. die 3. Näherung für die zwei oben behandelten Spezialfälle a) und b) und bestimmen
4. die Konstante α noch einmal auf einem vom obigen ganz unabhängigen Wege.

Wenn 1., 2. und 3. das Resultat 0, und 4. wieder das Resultat $\alpha = -\frac{1}{360\pi^2}$ ergeben, können wir darin für unser Verfahren eine direkte Bestätigung sehen.

1. Das Glied 1. Ordnung des Diracschen Matricelements in der Entwicklung nach g^i/mc muß immer verschwinden: denn es ist linear in den Impulsen und Energien der Lichtquanten als Glied 1. Ordnung, symmetrisch in den 4 Lichtquanten wegen der Summation über die Lichtquantenpermutationen, also 0 infolge des Erhaltungssatzes $\sum_{\text{Perm}} g^1 = 0$, $\sum_{\text{Perm}} g^1 = 0$ für Energie und Impuls.

2. Das Glied 2. Ordnung in g^i/mc des Diracschen Matricelements soll in dem speziellen Fall ausgerechnet werden, in dem alle 4 Lichtquanten parallele Polarisationen, aber beliebige komplanare Impulse g^1, g^2, g^3, g^4 haben.

In diesem Fall erhält man durch Entwicklung des Zählers Z_μ (5,15), welcher die Produkte der 4 gewöhnlichen Matricelemente der Teilprozesse enthält, bis zur 2. Ordnung in g^i/cm : (Statt für 6 Übergangsfälle $\mu = 1 \dots 6$ von denen nur 4 verschieden sind, 4 Gleichungen einzeln aufzuschreiben, sind

sie durch Spalten $\begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 = Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 = Z_6 \end{vmatrix}$ von je 4 Zahlen in einer Gleichung zusammengefaßt):

$$(9,2) \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 = Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 = Z_6 \end{vmatrix} &= -8 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + 8 \frac{p_y^2}{p_0^2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - 80 \frac{p_y^4}{p_0^4} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &- 4 \frac{p_y^2}{p_0^4} \left[(\mathfrak{p} g^1) \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix} + (\mathfrak{p} g^2) \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + (\mathfrak{p} g^4) \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix} \right] \\ &+ \frac{8 p_y^4}{p_0^4} (\mathfrak{p}, 2 g^1 + g^2 - g^4) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &- \frac{(g^1 g^1)}{6 p_0^2} \left[4 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \end{vmatrix} + 8 \frac{p_y^2}{p_0^2} \begin{vmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \\ 13 \end{vmatrix} + 80 \frac{p_y^4}{p_0^4} \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \right] \\ &- \frac{(\mathfrak{p} g^1)^2}{6 p_0^4} \left[4 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{vmatrix} + 8 \frac{p_y^2}{p_0^2} \begin{vmatrix} -28 \\ -20 \\ -20 \\ -37 \end{vmatrix} + 320 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right] \end{aligned} \right.$$

Darin ist im Gliede 2. Ordnung schon über die 24 Permutationen der Lichtquanten gemittelt unter Beachtung der aus dem Erhaltungssatz folgenden Relationen:

$$(9,3) \quad \dots = \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) = \sum_{\text{Perm}} (g^2 g^2) = -3 \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) = -3 \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^3) = \dots$$

Die Entwicklung der reziproken Nenner $1/N_\mu$ (5,14), welche Energiedifferenzen der Zwischenzustände zum Anfangszustand darstellen, bis zum selben Grade wird (in der obigen Bezeichnungsweise):

$$(9,4) \quad \begin{pmatrix} N_1^{-1} \\ N_2^{-1} + N_3^{-1} \\ N_4^{-1} \\ N_5^{-1} + N_6^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{p_0^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2 p_0^5} \begin{pmatrix} 1 \\ (p g^1) \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + (p g^2) \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + (p g^3) \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (p g^4) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ + \frac{(g^1 g^1)}{12 p_0^5} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{(p g^1)^2}{2 p_0^7} \begin{pmatrix} 25 \\ 90 \\ 55 \\ 39 \end{pmatrix},$$

wobei ebenfalls im höchsten Gliede schon über die Permutationen der Lichtquanten gemittelt wurde.

Multiplikation dieser Zähler (9,2) und reziproken Nenner (9,4) ergibt im Gliede 2. Ordnung in g^i/mc , nach Summation über die 6 Übergangsfälle $\mu = 1 \dots 6$, Winkelmittlung über p und Summation über die Permutationen der Lichtquanten unter Berücksichtigung von (9,3):

$$\sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} = - \sum_{\text{Perm}} \frac{(g^1 g^1)}{p_0^5} \left[-36 + \frac{564}{3} \frac{p^2}{p_0^2} - \frac{3876}{3 \cdot 5} \frac{p^4}{p_0^4} + \frac{3564}{5 \cdot 7} \frac{p^6}{p_0^6} \right]$$

und nach Integration¹⁾ über p :

$$\int d p \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} = -4 \pi \sum_{\text{Perm}} \left(\frac{g^1}{m c} \right)^2 \left[-\frac{36}{3} + \frac{564}{3 \cdot 5} - \frac{3876}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3564}{5 \cdot 7 \cdot 9} \right] = 0.$$

Tatsächlich verschwindet also bei beliebigen Impulsen das Glied 2. Ordnung in g^i/mc des Diracschen Matricelements für Streuung von Licht an Licht paralleler Polarisationen.

Die entsprechende 2. Ordnung nichtparalleler Polarisation soll nur am oben behandelten ganz speziellen Fall (8,2b) senkrechter Polarisation und paralleler Impulse gleichen Betrags untersucht werden.

Hier erhält man für das Glied 2. Ordnung des Diracschen Matricelements, wenn man die im § 6 berechneten Spalten der Zähler (8,15) mit den Spalten der reziproken Nenner (8,9) multipliziert, die zu Gliedern 2. Ordnung in g^i/mc führen, und über die Positronenrichtung p mittelt:

$$\sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} = 4 \frac{|g|^2}{p_0^5} \left[44 - \frac{332}{3} \frac{p^2}{p_0^2} + \frac{1180}{3 \cdot 5} \frac{p^4}{p_0^4} - \frac{3564}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{p^6}{p_0^6} \right]$$

$$1) \int_0^{\infty} \frac{p^n}{p_0^n + 5} p^2 dp = \frac{1}{(m c)^2} \frac{1}{n+3}.$$

und dies wird nach Integration über die Positronenenergie p_0 :

$$\int d\mathbf{p} \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} = 4\pi \cdot 4 \left(\frac{g}{mc}\right)^2 \left[\frac{44}{3} - \frac{332}{3 \cdot 5} + \frac{1180}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{3564}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \right] \\ = 0$$

in Übereinstimmung mit unserer allgemeinen Behauptung.

3. Das Verschwinden der Glieder 3. Ordnung in der Entwicklung des Diracschen Matricelements nach Lichtfrequenzen soll ebenfalls nur in den beiden speziellen oben behandelten Fällen (8,2a, b) paralleler gleich großer Impulse und paralleler und senkrechter Polarisierungen nachgeprüft werden. Hier haben wir es aber schon bestätigt. Denn nach S. 430 fallen alle ungeraden Potenzen aus Lichtquantenimpulsen und -Energien fort, weil über die Permutationen der z. T. gleichen, z. T. entgegengesetzten Lichtquanten summiert wird.

4. Die Konstante α , welche für die Streuung von Licht an Licht paralleler Polarisation maßgebend ist, soll nun auf einem neuen Wege nochmals berechnet werden. Statt, wie wir es oben taten, in einem speziellen Fall (8,2b) gleicher bzw. entgegengesetzt gleicher Impulse die Matricelemente (5,13) der Diracschen Theorie und der Feldfunktion (8,4) zu vergleichen, betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall beliebiger Impulse (bei parallelen Polarisierungen), beschränken uns aber auf den Vergleich eines der Glieder in (8,4), die zu dem betrachteten Übergang beitragen.

Das Matricelement von:

$$\alpha \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \int (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2)^2 dV$$

enthält nach (8,4) für einen Übergang \parallel Polarisierungen der drei Glieder:

$$(9,5) \quad D \cdot \alpha \cdot \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \sum_{\text{Perm}} [(g^1 g^2) (g^3 g^4) - 2 (g^1 g^2) g^3 g^4 + g^1 g^2 g^3 g^4].$$

Wir greifen das mittlere Glied heraus und bestimmen die Konstante α durch Vergleich dieses Glieds

$$(9,5a) \quad \alpha D \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} (-2) \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4$$

mit dem entsprechenden Glied des Diracschen Matricelements, das wir nun berechnen.

Das Matricelement H_{in}^4 der Diracschen Theorie besteht (im Gliede 4. Ordnung der Entwicklung nach g^i/mc) aus symmetrischen Formen 4. Grades in den vier Lichtquantenimpulsen und Energien. Wegen der Erhaltungssätze sind diese aber nicht unabhängig, vielmehr lassen sie sich alle aus den vier Formen

$$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) (g^3 g^4), \quad \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4, \quad \sum_{\text{Perm}} g^1 g^2 g^3 g^4, \quad \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) (g^2 g^2)$$

linear zusammensetzen, die ihrerseits linear unabhängig sind.

Wie eine einfache Anwendung der Erhaltungssätze:

$$\sum_{\text{Perm}} g^1 = 0, \quad \sum_{\text{Perm}} g^1 = 0$$

zeigt, lauten diese linearen Beziehungen zwischen den verschiedenen Gliedern 4. Ordnung in g/mc des Diracschen Matricelements:

Gl. (9,6)

	$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) (g^3 g^4)$	$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4$	$\sum_{\text{Perm}} g^1 g^3 g^2 g^4$	$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) (g^2 g^2)$
$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) g^2 g^3 = \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) g^2 g^3 =$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0
$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) g^1 g^2 = \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) (g^1 g^2) =$	0	0	$+\frac{2}{3}$	-1
$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1)^2 =$	0	0	-2	3
$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^1 g^3 =$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	0
$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^1 g^3 =$	0	+1	-1	1
$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) (g^1 g^2) =$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{6}$	0
$\sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2)^2 =$	+1	0	-1	1

Die linearen Beziehungen zwischen Gliedern wie

$$\sum_{\text{Perm}} (p g^1) (p g^2) g^3 g^4,$$

welche den Positronenimpuls $-p$ enthalten, über den integriert wird, folgen hieraus mit Hilfe ihrer Eigenschaften gegenüber der Winkelmittlung in p :

$$(9,7) \left\{ \begin{aligned} \overline{(p g^1) (p g^2) (p g^3) (p g^4)} &= \frac{p^4}{3 \cdot 5} [(g^1 g^2) (g^3 g^4) + (g^1 g^3) (g^2 g^4) + (g^1 g^4) (g^2 g^3)] \\ \overline{p_\nu^2 \cdot (p g^1) (p g^2) (p g^3) p g^4} &= \frac{p^6}{3 \cdot 5 \cdot 7} [(g^1 g^2) (g^3 g^4) + (g^1 g^3) (g^2 g^4) + (g^1 g^4) (g^2 g^3)] \\ \overline{p_\nu^4 \cdot (p g^1) (p g^2) p g^3 (p g^4)} &= \frac{p^8}{5 \cdot 7 \cdot 9} [(g^1 g^2) (g^3 g^4) + (g^1 g^3) (g^2 g^4) + (g^1 g^4) (g^2 g^3)] \\ \overline{(p g^1) (p g^2)} &= \frac{p^2}{3} (g^1 g^2) \\ \overline{p_\nu^2 \cdot (p g^1) (p g^2)} &= \frac{p^4}{3 \cdot 5} (g^1 g^2) \\ \overline{p_\nu^4 \cdot (p g^1) (p g^2)} &= \frac{p^6}{5 \cdot 7} (g^1 g^2). \end{aligned} \right.$$

Die Behauptung der Eichinvarianz besagt nun, daß in der Tabelle (9,6) der linearen Beziehungen die 4. Spalte (in der Summe über alle Glieder des Diracschen Matrixelements) nicht vorkommt, und die Behauptung der Lorentzinvarianz: daß die ersten drei Spalten (summiert über alle Glieder) im Verhältnis 1: -2:1 gekoppelt sind (9,5).

Wir verabreden nun (9,5a), nur die Glieder der zweiten Spalte zu sammeln, d. h. (9,6; 9,7) im Diracschen Matrixelement nur die Glieder:

$$(9,8) \left\{ \begin{aligned} \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4 &= \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4, \\ \sum_{\text{Perm}} (p g^1) (p g^2) g^3 g^4 &= \sum_{\text{Perm}} (p g^1) (p g^2) g^3 g^4 \end{aligned} \right.$$

$$(9,8) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^1 g^2 &= \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4, \\ \sum_{\text{Perm}} (p g^1) (p g^2) g^1 g^2 &= \sum_{\text{Perm}} (p g^1) (p g^2) g^3 g^4 \\ \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^1) g^1 g^2 &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4, \\ \sum_{\text{Perm}} (p g^1) (p g^2) g^1 g^2 &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{\text{Perm}} (p g^1) (p g^2) g^3 g^4 \end{aligned} \right.$$

und die, die zu ihnen führen können, auszurechnen und alle anderen fortzulassen.

Unter dieser Vereinfachung erhält man für die Zähler des Diracschen Matricelements durch Entwicklung von (5,15) nach g^i/mc (in derselben Bezeichnungsweise der Übergangswege $\mu = 1 \cdot \cdot 6$ durch Spaltenstellen wie in 9,2):

$$(9,9) \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 = Z_6 \end{matrix} &= -8 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{8 p_y^2}{p_0^2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} - 8 \frac{p_y^4}{p_0^4} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &- \frac{4 p_y^2}{p_0^4} \left[(p g^1) \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix} + (p g^2) \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + (p g^4) \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix} \right] \\ &- \frac{8 p_y^4}{p_0^6} (p, -2 g^1 - g^2 + g^4) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &- 2 \left[\frac{(g^1 g^2)}{p_0^2} - \frac{(p g^1) (p g^2)}{p_0^4} \right] \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} + 2 \left[\frac{(g^1 g^4)}{p_0^2} - \frac{(p g^1) (p g^4)}{p_0^4} \right] \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &+ 2 \left[\frac{g^2 g^4}{p_0^2} - \frac{(p g^2) (p g^4)}{p_0^4} \right] \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &- 2 \frac{p_y^2}{p_0^4} \left[(g^1 g^2) \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} + (g^4, g^1 + g^2) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{(p g^1) (p g^2)}{p_0^2} \begin{vmatrix} 15 \\ 7 \\ 7 \\ 15 \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p g^4) (p, g^1 + g^2)}{p_0^2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right] \\ &- 8 \frac{p_y^4}{p_0^6} \left[- (g^1 g^2) + \frac{4 (p g^1) (p g^2)}{p_0^2} - 2 \frac{(p g^1) (p g^4)}{p_0^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(p g^2) (p g^4)}{p_0^2} \right] \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

Die Entwicklung geht hier nur bis zur 2. Ordnung, weil die Glieder, die gesammelt werden, zwei Potenzen der Lichtquantenenergien $g^3 g^4 \dots$ enthalten sollen, die nur im Nenner (5,14) vorkommen.

In ähnlicher Weise vereinfacht sich die Entwicklung der reziproken Nenner (5,14):

$$(9,10) \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} N_1^{-1} & 6 & -4 & -2 \\ N_2^{-1} + N_3^{-1} & 12 & 12 & 0 \\ N_4^{-1} & -4 & 6 & -2 \\ N_5^{-1} + N_6^{-1} & -4 & -4 & 0 \end{array} \right] = \frac{g^1 g^2}{p_0^5} + \frac{g^1 g^4}{p_0^5} + \frac{g^2 g^4}{p_0^5} \\ & + \frac{g^1 g^2}{p_0^7} \left[\begin{array}{c|c|c|c} -12 & -8 & 3 \\ (\psi g^1) & -30 & 8 \\ 14 & 4 & -3 \\ 10 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array} \right] \\ & + \frac{g^1 g^4}{p_0^7} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 6 & 3 & -4 \\ (\psi g^1) & -30 & 18 \\ -18 & -3 & 8 \\ 8 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{array} \right] \\ & + \frac{g^2 g^4}{p_0^7} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 2 & -2 \\ (\psi g^1) & 0 & -2 \\ 7 & 2 & -2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \\ & + \frac{(g^1 g^2) g^3 g^4}{2 p_0^7} \left[\begin{array}{c|c|c} -21 & 91 \\ -30 & 70 \\ 9 & -119 \\ 5 & -21 \end{array} \right] + \frac{(\psi g^1) (\psi g^2) g^3 g^4}{2 p_0^9} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

in der die Glieder 0. und 1. Ordnung fortgelassen werden konnten.

Multiplikationen dieser Zähler (9,9) und reziproken Nenner (9,10) ergibt im Gliede 4. Ordnung nach Mittelung über die Positronenrichtung ψ :

$$\sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} \frac{\bar{Z}_{\mu}}{N_{\mu}} = -\frac{1}{2} \left[5 + \frac{25}{3} \frac{p^2}{p_0^2} - \frac{231}{3 \cdot 5} \frac{p^4}{p_0^4} + \frac{99}{5 \cdot 7} \frac{p^6}{p_0^6} \right] \sum_{\text{Perm}} \frac{(g^1 g^2) g^3 g^4}{p_0^7}$$

und nach Integration über die Positronenenergie p_0 :

$$(9,11) \left\{ \begin{aligned} H_{in}^4 &= \sum_{\text{Perm}} \sum_{\mu} C \int d\psi \frac{Z_{\mu}}{N_{\mu}} = -4\pi C \sum_{\text{Perm}} \frac{(g^1 g^2) g^3 g^4}{(mc)^4} \left[\frac{5}{3 \cdot 5} + \frac{25}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right. \\ & \left. - \frac{231}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{99}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \right] = -4\pi C \left(\frac{16}{5 \cdot 9} \right) \sum_{\text{Perm}} \frac{(g^1 g^2) g^3 g^4}{(mc)^4} \end{aligned} \right.$$

Damit ist das verabredete Glied des Diracschen Matricelements für Streuung von Licht an Licht paralleler Polarisierung ausgerechnet.

Das Matricelement des entsprechenden Gliedes der angesetzten Lichtquanten-Wechselwirkung (2,21) ist nach (9,5):

$$(9,12) \quad \alpha \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} D (-2) \sum_{\text{Perm}} (g^1 g^2) g^3 g^4.$$

Gleichsetzung beider Ausdrücke (9,11), (9,12) bestimmt den Koeffizienten α zu

$$\alpha = - \frac{1}{360 \pi^2}$$

in Übereinstimmung mit der früheren Rechnung.

§ 10. Diskussion des Resultats

Wir können nun unser Verfahren als bestätigt ansehen und das Resultat folgendermaßen zusammenfassen:

So wie in der gewöhnlichen Maxwell'schen Theorie ein Elektron von einem elektromagnetischen Feld, so ist in der Löchertheorie ein Lichtquant von einem Materiefeld umgeben. Die Hamiltonfunktion eines jeden Feldes ist daher die Summe aus den Energien von Licht und Materie, sie enthält die Freiheitsgrade: Feldstärken und Ladungswellen.

So wie aber in dem speziellen Fall, in welchem keine transversalen Lichtquanten da sind und die Elektronen sich so langsam bewegen, daß keine erzeugt werden können, diese Hamiltonfunktion annähernd ersetzt werden kann durch eine Hamiltonfunktion, welche nur noch die Freiheitsgrade der Elektronen enthält (wobei dann die Energie des elektromagnetischen Feldes ersetzt und seine Erzeugung angedeutet wird durch die Coulombsche Wechselwirkung der Elektronen): ebenso kann in dem hier betrachteten Spezialfall, in welchem keine wirklichen Elektronen vorhanden sind und die Energie der Lichtquanten nicht ausreicht, um Elektronenpaare zu erzeugen (0,1), die Energie des Gesamtfeldes annähernd ersetzt werden durch eine Hamiltonfunktion, die nur noch von den Feldstärken $\mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ allein abhängt:

$$(10,1) \quad \bar{U} = \int U dV \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{D}| \ll E_0, \quad (\text{grad } \mathfrak{D}_i)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}_i}{\partial t} \right)^2 \ll 2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^{-2} \mathfrak{D}_i^2 \\ |\mathfrak{B}| \ll E_0, \quad (\text{grad } \mathfrak{B}_i)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}_i}{\partial t} \right)^2 \ll 2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^{-2} \mathfrak{B}_i^2 \end{array} \right.$$

$$(10,2) \quad U = \frac{\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2}{8\pi} - \frac{1}{360\pi^2} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2)^2 + 7(\mathfrak{B} \mathfrak{D})^2] \left(E_0 = \frac{e}{\left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$(10,3) \quad \mathfrak{D}_i(\xi) \mathfrak{B}_k(\xi') - \mathfrak{B}_k(\xi') \mathfrak{D}_i(\xi) = 2 \hbar c i \frac{\partial}{\partial \xi^k} \delta(\xi - \xi').$$

Diese Hamiltonfunktion \bar{U} ist als Anfang einer Entwicklung aufzufassen, die nach Potenzen der Feldstärken bis zur 4. Ordnung (entsprechend der Entwicklung der Diracschen Theorie nach der Elek-

tronenladung bis zur 4. Ordnung) und nach dem Grade der Ableitung der Feldstärken bis zur 0. Ordnung durchgeführt ist (entsprechend der Entwicklung der Diracschen Matrixelemente bis zur 4. Ordnung nach Lichtfrequenzen g^i / mc).

Der Zusatz zur Maxwell'schen Energie in (10,2) ist eine Wechselwirkung der Lichtquanten, welcher die virtuelle Materieerzeugung andeutet und die Energie des Materiefeldes ersetzt, welches die Lichtquanten umgibt. Die hier betrachtete Näherung (in der die Ableitungen der Feldstärken vernachlässigt werden) beschreibt eine Nahwirkung der Lichtquanten. Die zu dieser Hamiltonfunktion (10,2) gehörigen kanonischen Gleichungen lauten:

$$(10,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}} + \text{rot } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0; \\ -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}} + \text{rot } \mathfrak{H} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{D} = 0; \\ \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [4(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \mathfrak{E} + 14(\mathfrak{E} \mathfrak{B}) \mathfrak{B}] \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{B} + \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [4(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \mathfrak{B} - 14(\mathfrak{E} \mathfrak{B}) \mathfrak{E}] \end{array} \right.$$

oder, in anderer Schreibweise:

$$(10,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}} + \text{rot } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0; \\ -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{E}} + \text{rot } \mathfrak{B} = \frac{4\pi i}{c}, \quad \text{div } \mathfrak{E} = 4\pi \rho; \\ \frac{4\pi i}{c} = \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [4(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \mathfrak{E} + 14(\mathfrak{E} \mathfrak{B}) \mathfrak{B}] \right. \\ \quad \left. - \text{rot} [4(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \mathfrak{B} - 14(\mathfrak{E} \mathfrak{B}) \mathfrak{E}] \right] \\ 4\pi \rho = \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \text{div} [-4(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \mathfrak{E} - 14(\mathfrak{E} \mathfrak{B}) \mathfrak{B}]. \end{array} \right.$$

Sie können auch aus dem Variationsprinzip $\int \int L dV dt = \text{Extr.}$ für die Lagrangefunktion

$$(10,6) \quad L = \frac{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2}{2} + \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} [(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + 7(\mathfrak{E} \mathfrak{B})^2].$$

unter der Nebenbedingung $\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}$ hergeleitet werden. In der ersten Fassung (10,4) dieser Gleichungen wird die mit dem Feld gekoppelte virtuelle Materie angedeutet durch ein Auseinander-treten von elektrischer Feldstärke \mathfrak{E} und elektrischer Verschiebung \mathfrak{D} , von magnetischer Induktion \mathfrak{B} und der Größe \mathfrak{H} , ebenso wie in der Elektrodynamik polarisierbarer Körper die wirklich mit dem Feld gekoppelte Materie dargestellt wird.

Bei der zweiten Schreibweise (10,5) tritt die vom Feld $\mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ virtuell erzeugte Materie direkt als scheinbare Dichte $\rho = \rho(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$

und scheinbarer Strom $i = i(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ in Erscheinung. Außerdem zeigt diese Ausdrucksweise (10,5), daß die hier angegebenen Gl. (10,2 ... 10,6) mit den allgemeinen Gleichungen¹⁾ für Licht und Materie im Einklang sind, in denen nur die Materie ρ, i durch bestimmte Funktionen der Feldstärken, die sie erzeugen, ersetzt ist.

Es gelten, wie man leicht aus (10,2), (10,3) oder (10,4) folgert, die Erhaltungssätze

$$(10,8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]}{4\pi} = 0; \\ T_{xx} = U - \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{[\mathfrak{B} \mathfrak{D}]_k}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} = 0; \quad T_{xy} = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y) \\ T_{ik} = T_{ki}, \quad [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = [\mathfrak{D} \mathfrak{B}], \end{array} \right.$$

welche zeigen, daß $\frac{[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]}{4\pi} = \frac{[\mathfrak{D} \mathfrak{B}]}{4\pi}$ Energiestrom und Impulsdichte ist im Einklang mit den Formeln der allgemeinen Quantendynamik der Wellenfelder¹⁾.

Die Gleichungen sind nicht linear, d. h. es entspricht ihnen kein Superpositionsprinzip und sie beschreiben eine Streuung von Licht an Licht, die um so größer wird, je stärker (gegen E_0) und je kurzwelliger (gegen \hbar/mc) die Felder sind.

Den Wirkungsquerschnitt dQ für Streuung von Licht an Licht erhält man, indem man das Quadrat des Matrixelements H_{in}^4 der Wechselwirkung in (10,2) für den Übergang zweier Lichtquanten mit den Impulsen g^1, g^2 , den Energien cg^1, cg^2 und den Polarisationen e^1, e^2 in zwei andere mit den Impulsen $-g^3, -g^4$, den Energien $-cg^3, -cg^4$ und den Polarisationen e^3, e^4 bildet und es multipliziert mit der Zahl $1/\Delta W$ der sekundären Lichtquantenpaare $-g^3, -g^4$ pro Energieintervall $c(|g^3| + |g^4|)$ für den Raumwinkel $d\Omega_4$ um g^4 und es schließlich multipliziert mit $\frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{V}{c}$:

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{V}{c} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\Delta W} |H_{in}^4|^2, \\ \frac{1}{\Delta W} &= d\Omega^4 \frac{V}{c\hbar^3} \frac{|g^4|^2}{1 - \cos g^3 g^4}, \\ H_{in}^4 &= -\frac{1}{360\pi^2} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \left(\frac{c\hbar}{V} \right)^2 \frac{1}{\hbar^4} \frac{V}{\sqrt{g^1 g^2 g^3 g^4}} \sum_{\text{Perm } 1,2,3,4} \left\{ \begin{array}{l} (e^1 e^2)(e^3 e^4) g^1 g^2 g^3 g^4 \\ - 2 ([e^1 g^1][e^2 g^2]) (e^3 e^4) g^3 g^4 \\ + ([e^1 g^1][e^2 g^2]) ([e^3 g^3][e^4 g^4]) \\ + 7 |e^1 e^2 g^2| |e^3 e^4 g^4| g^1 g^3 \end{array} \right\} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} g^1 + g^2 + g^3 + g^4 = 0 \\ g_1 + g^2 + g^3 + g^4 = 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1) W. Heisenberg u. W. Pauli, Ztschr. f. Phys. 56. S. 1. 1930; 59. S. 168. 1930.

$$(10,9) \left\{ \begin{aligned} dQ &= \frac{d\Omega^4}{(180\pi)^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{(mc)^6} \\ &\cdot \frac{g^4}{g^1 g^2 g^3 (1 - \cos(g^1 g^4))} \left[\sum_{\text{Perm}} \left\{ \begin{aligned} &(e^1 e^2)(e^3 e^4) g^1 g^2 g^3 g^4 \\ &- 2 ([e^1 g^1][e^2 g^2])(e^3 e^4) g^3 g^4 \\ &+ ([e^1 g^1][e^2 g^2])([e^3 g^3][e^4 g^4]) \\ &+ 7 |e^1 e^2 g^2| |e^3 e^4 g^4| g^1 g^3 \end{aligned} \right\} \right] \end{aligned} \right.$$

Um ein Beispiel zu geben, berechnen wir den Wirkungsquerschnitt für den Fall, daß zwei Lichtquanten gleicher Energie, entgegengesetzter Impulse und gemeinsamer Polarisierung aufeinanderstoßen und sich in zwei ebensolche Lichtquanten derselben Polarisierung verwandeln. Für die Wellenlänge λ und den Streuwinkel φ wird dann:

$$(10,10) \quad dQ = \frac{2 d\Omega}{5^2 \cdot 3^4} [3 + \cos^2 \varphi]^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^4 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \frac{1}{\lambda^6}.$$

Der Wirkungsradius für Streuung von Licht an Licht ist also von der Größenordnung 10^{-15} cm für γ -Strahlen, 10^{-24} cm für Röntgenstrahlen und 10^{-36} cm für sichtbares Licht, und wird daher nur schwer experimentell festzustellen sein.

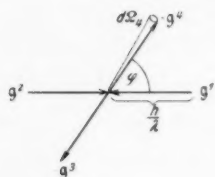


Fig. 3

Daß es sich hier (trotz der Darstellung durch klassische Feldfunktionen) um einen rein quantenmechanischen Effekt handelt, wird schon dadurch hervorgehoben, daß der Zusatz in (10,2) proportional zu \hbar ist.

Es ist nun interessant, die hier berechnete Abänderung der Maxwellgleichungen durch die quantentheoretische Möglichkeit der Paarerzeugung mit der von Born¹⁾ aus Überlegungen innerhalb der klassischen Theorie vorgeschlagenen zu vergleichen.

Bekanntlich hat Born auf Grund der Tatsache, daß die klassischen Maxwellgleichungen eine unendliche Feldenergie um ein Elektron geben, abgeänderte Feldgleichungen angesetzt, in denen er eine Konstante so bestimmen konnte, daß das Feld einer Punktladung e eine Energie mc^2 bekommt, und hat dann diese Gleichungen in der Weise gequantelt, die durch ihre Eigenschaften als kanonisches System vorgeschrieben ist. Die Bornsche Theorie hat, entwickelt nach Feldstärken, im ersten Glied die Hamiltonfunktion:

$$(10,11) \quad \bar{U} = \int \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{D}^2}{8\pi} dV - \frac{(1,236)^4}{32\pi} \frac{1}{E_0^2} \int [(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2)^2 + 4(\mathfrak{B} \mathfrak{D})^2] dv.$$

1) M. Born, M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London [A] **143**, S. 410. 1933; [A] **144**, S. 425. 1934; [A] **147**, S. 522. 1934.

Aus Invarianzgründen stimmen die Zusatzglieder zur Maxwell'schen Energie in der Bornschen (10,11) und in der Diracschen Theorie (10,2) bis auf Zahlenkoeffizienten überein. Die Zahlenkoeffizienten unterscheiden sich in beiden Theorien um den Faktor

$$\frac{4}{45 \pi \cdot (1,236)^4} \frac{\hbar c}{e^2} \text{ für das Glied } (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}^2)^2$$

und um

$$\frac{7}{45 \pi \cdot (1,236)^4} \frac{\hbar c}{e^2} \text{ für das Glied } (\mathfrak{B} \mathfrak{D})^2.$$

Wegen des tatsächlichen Wertes der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten ist der numerische Wert dieses Faktors 1,7 bzw. 2,9. Und es ist bemerkenswert, daß die quantentheoretische Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen jedenfalls von der Größenordnung ist, die nach klassischer Vorstellung auf Grund der Selbstenergie zu erwarten wäre.

Diese Übereinstimmung in der Größenordnung bedeutet natürlich noch nicht, daß in der Diracschen Theorie die Frage der Selbstenergie schon gelöst wird, wenn man nur in ihrer Entwicklung nach der Elektronenladung zu genügend hohen Näherungen geht.

Aber sie weist doch darauf hin, daß eine Berücksichtigung der höheren Glieder dieser Entwicklung für die Frage der Konvergenz zu einer anderen Situation führen könnte, als man in den niederen Näherungen findet.

Wie die Gl. (10,2), (10,4) zeigen, braucht es gar nicht immer erlaubt zu sein, die üblich angesetzte Entwicklung der Feldtheorie nach der Elektronenladung e (d. h. hier nach der Feldstärke $\frac{\mathfrak{E}}{E_0} \cdot \frac{\hbar c}{e^2}$) nach dem ersten nichtverschwindenden Glied abzubrechen. Denn die hier angeschriebenen Glieder 4. Ordnung können bei genügend starken (und die nicht mehr angeschriebenen Glieder mit den Ableitungen der Feldstärken können, wie Weisskopf bemerkt hat, bei genügend kurzwelligen) Feldern sehr wohl noch einen Beitrag geben, der von derselben Größenordnung ist, wie der der vorhergehenden Glieder 1., 2. und 3. Ordnung, mit denen man sich bisher bei allen Problemen begnügt hat, d. h. die Entwicklung nach der Kopplung e von Licht und Materie braucht nicht zu konvergieren, wenn (etwa bei schnellen Teilchen oder in der Nähe eines Elektrons) diese Kopplung durch Materieerzeugung zu innig wird.

Man bekommt beinahe den Eindruck¹⁾, bei der Entwicklung

1) Nach Prof. W. Heisenberg.

der Strahlungstheorie nach der Elektronenladung etwas Ähnliches vorzunehmen, wie wenn man einen endlichen Ausdruck

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e}{r}} dr$$

durch eine Entwicklung berechnen würde,

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e}{r}} dr = \int_0^1 dr + e \int_0^1 \frac{dr}{2r} + e^2 \int_0^1 \frac{dr}{-8r^3} + \dots,$$

deren einzelne Glieder um so stärker divergieren, je höher sie sind.

Die Ergebnisse dieser Arbeit deuten also darauf hin, daß man, um in den prinzipiellen Schwierigkeiten der Strahlungstheorie weiter zu kommen, zunächst versuchen muß, die Entwicklung nach $e^2/\hbar c$ durch etwas anderes zu ersetzen.

Herrn Prof. Heisenberg möchte ich für seine wesentliche Hilfe und sein ständiges Interesse bei der Arbeit herzlich danken. Ferner danke ich Herrn Kockel für seine Mitarbeit, ohne die die Ausführung der Rechnungen gar nicht möglich gewesen wäre.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, den 21. Juni 1935.

(Eingegangen 28. Januar 1936)

Untersuchungen an Wismutkristallen

I. Wärme- und Elektrizitätsleitung in transversalen Magnetfeldern¹⁾

Von E. Grüneisen und J. Gieleßen

(Mit 12 Figuren)

1. *Einleitung.* Zur Entscheidung der Frage, in welchem Maße Gitterleitung und Elektronenleitung beim Wärmetransport in Metallen beteiligt sind und ob sie sich trennen lassen, lag es nahe, den Fall des Wismuts herauszugreifen, wo man durch transversale Magnetfelder die Elektrizitätsleitung, vermutlich also auch die Elektronenleitung für Wärme, in tiefer Temperatur stark herabsetzen kann. Blicke die Gitterleitung hierbei unverändert, so müßte es gelingen, die Gesamtwärmeleitung (W.-L.) von der Elektronenleitung zu befreien, wenn die Magnetfelder stark genug sind.

Mit diesem Ziele unternahm Reddemann (1) bereits in diesem Institut Vorversuche, die aussichtsreich schienen, aber wegen seines Wegganges bald abgebrochen werden mußten. Wir haben die Versuche in größerem Umfange an vier Einkristallstäben durchgeführt, vorläufig nur in transversalen Feldern bis 6100 Oe und bei den Temperaturen -183° und -195° C.

Die Änderung des elektr. Widerstands von Bi-Kristallen im Magnetfelde ist, von älteren Messungen abgesehen, von Kapitza (2), de Haas und Schubnikow (3), Stierstadt (4), Kohler (5) eingehend untersucht. Wir tragen dazu kaum Neues bei, brauchen aber die Elektrizitätsleitung (E.-L.) zum Vergleich mit der W.-L.

Die von uns untersuchte Änderung der W.-L. im transversalen Magnetfelde heißt nach den Entdeckern auch „2. Righi-Leduc-Effekt“ (6) und ist an Bi schon mehrfach gemessen worden (vgl. Abschn. 7).

2. *Versuchsanordnung.* Die W.-L. wurde nach der Methode des stationären Wärmestroms gemessen, wofür die früher mit Goens (7) und Reddemann (8) ausgearbeitete und wohlbewährte Apparatur zur Verfügung stand (Fig. 1a).

Am oberen Ende des Stäbchens wird meßbare, bei allen Versuchen etwa gleichbleibende Joulesche Heizleistung zugeführt, am

1) Vorgetragen in der Sitzung des Gauvereins Hessen der Dtsch. Phys. Ges. in Marburg am 22. Februar 1936.

unteren Ende fließt sie in das Bad ab, welches auch den hoch-evakuierten Messingzylinder M umspült. Die Temperaturdifferenz (etwa 1°) an der Meßstrecke (etwa 2 cm) wurde wieder mit den früher schon geeichten zwei Thermoelementen Konstantan-Manganin (Ko-Mng) gemessen, deren Lötstellen durch Glimmer-isolierte U-Federchen (Fig. 1b) an der gleichen Mantellinie des Stabes (genau übereinander) angeklemt waren. Die Nebenlötstellen befinden sich am Bodenstück von M .

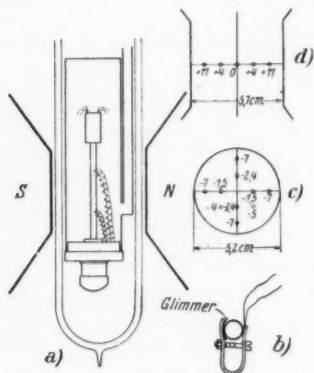


Fig. 1. Meßanordnung. Die Ziffern in c) und d) bedeuten die prozentische Abweichung der Feldstärke im markierten Punkt von derjenigen im Punkte 0

Die W.-L.-Messungen haben wir auf die Temperaturen -183° und -195° C beschränkt, um bei kleinen Strahlungskorrekturen ($\sim 1\%$) zu bleiben.

Das den Zylinder M umgebende Dewargefäß paßt knapp zwischen die Pole eines großen wassergekühlten Elektromagneten, der um die zur Feldrichtung senkrechte Symmetrieachse um meßbare Winkel ϑ geschwenkt werden kann. Größe und Abstand der Polschuhe, sowie die Feldverteilung im Zwischenraum zeigt Fig. 1c und d. Die Meßstrecke des Stabes befindet sich

danach in einem ziemlich homogenen Felde. Dessen Stärke wurde mit einer geeichten Wismutspirale (H & Br) ausgewertet. Die absoluten Fehler können wenige Prozent betragen, die relativen sind geringer.

3. Der elektr. Widerstand der Bi-Kristalle ergab sich einfach durch Spannungsvergleich mittels des Dießelhorstschen Kompensationsapparats zwischen einer Normalbüchse und der in Reihe dazu liegenden Meßstrecke, wobei die Ko-Drähte als Potentialsonden dienten, der Strom aber, etwa 0,05 Amp., dem Körper der Heizspule durch einen besonderen dünnen Cu-Draht¹⁾ zugeführt und vom Bodenstück durch M abgeleitet wurde. Wären diese Messungen bei evakuiertem Zylinder M gemacht, so hätten die durch Peltierwärme an den Enden der Meßstrecke entstehenden Temperaturdifferenzen stark gestört. Diese forderten jedoch nur kleine meßbare

1) Dieser wurde bei den W.-L.-Messungen abgelötet, um unkontrollierbaren Wärmeaustausch zu vermeiden.

Korrekturen oder waren zu vernachlässigen, wenn der Zylinder M mit atm. Luft (bei 0°C) oder flüssigem O_2 und N_2 gefüllt war. Zu letzterem Zweck erhielt M unten und oben Öffnungen, die leicht wieder zugelötet werden konnten.

4. Die Züchtung der Bi-Kristalle nach bekanntem Verfahren verdanken wir Herrn Erfling. Die Firma Kahlbaum lieferte uns aus älteren Beständen ein Material höheren Reinheitsgrades, als es jetzt bei ihr handelsüblich ist. Es gelang Erfling jedoch nicht, den Reinheitsgrad nach Schubnikow und de Haas (9) noch merklich höher zu treiben. Die von uns untersuchten 4 Stäbchen hatten etwa 4—5 cm Länge, 3 mm Durchmesser, waren aber, da in Rinnen mit Deckel kristallisiert, nur annähernd kreiszylindrisch. Ihr Querschnitt wurde durch Wägung bestimmt. (Angenommene Dichte 9,78.)

Tabelle 1

Stab	t	$\varrho \cdot 10^8$	r	$[\tau]$	$\lambda \left[\frac{\text{Watt}}{\text{cm/Grad}} \right]$	$L \cdot 10^8$
Bi 66 $\varphi = 2^\circ$	0°	127,4	1,000	—	—	—
	— 182,98	41,0	0,322	0,301	0,129	5,8 ₇
	— 195,39	36,1	0,284	0,260	0,147	6,8 ₂
Bi 13 $\varphi = 16^\circ$	0°	125,6	1,000	—	—	—
	— 78,36	86,6	0,689	—	—	—
	— 183,2 ₀	42,0	0,334	—	0,137	6,4 ₁
	— 194,84	37,4	0,298	0,268 (unsicher)	0,154	7,3 ₄
Bi 51 $\varphi = 86^\circ$	0°	99,1	1,000	—	—	—
	— 183,49	40,4	0,408	0,350	0,185	8,3 ₄
	— 194,78	37,0	0,374	0,307	0,204	9,6 ₄
Bi 72 $\varphi = 85,5^\circ$	0°	102,9	1,000	—	—	—
	— 183,13	43,0	0,418	0,350	0,175	8,3 ₅

Zur Charakterisierung ihres Reinheitsgrades mag Tab. 1 dienen, in der φ den Winkel zwischen trigonaler und Stabachse, ϱ den spez. el. Widerstand, $r = \varrho/\varrho_0 \cdot \text{C}$ bedeutet, $[\tau]$ jedoch etwa die r -Werte, die man nach de Haas-Schubnikow für reinstes Bi der betreffenden Kristallorientierung erwarten könnte (10). Man erkennt, daß die „Restwiderstände“ bei Bi 66 und Bi 13 etwa 3—4%, bei Bi 51 und 72 etwa 9—10% des Widerstandes bei 0°C ausmachen. Unsere Proben sind also längst nicht so rein, wie die von de Haas-Schubnikow.

Während es Erfling gelang, Stäbe ziemlich genau \parallel und \perp zur trig. Achse zu züchten, mißglückte bei den Bi_\perp -Stäben (Nr. 51 und 72) die richtige Einstellung der Stabachse \parallel oder \perp zur

binären Nebenachse, so daß diese beiden Fälle uns fehlen. Bi 51 und 72 stellen Übergänge dar, bei denen die binären Achsen Winkel von 20 und 18,5° mit der Stabachse bilden (vgl. Fig. 7). Bi 13 ($\varphi = 16^\circ$) ist ein Beispiel für eine mittlere Richtung.

5. *Messungen ohne Magnetfeld.* Neben den el. Widerständen enthält Tab. 1 das Wärmeleitvermögen λ , umgerechnet auf die Temperatur der el. Widerstandsmessung, und die Wiedemann-Franz-Lorenzsche Zahl

$$L = \frac{\varrho \lambda}{T} = \frac{\lambda}{\kappa T}.$$

Trotz des geringen Reinheitsgrades nimmt λ mit sinkender Temperatur zu. Die Absolutwerte von λ scheinen durch Unreinheit stark gesenkt zu sein, denn de Haas und Capel (11) finden bei -192°C zum Teil erheblich höhere Zahlen: $\lambda_{\parallel} = 0,166$; $\lambda_{\perp} = 0,206$ bis $0,260$ [Watt $\text{cm}^{-1} \text{grad}^{-1}$]. Bis -253°C nimmt λ_{\parallel} und λ_{\perp} stark zu. Den Unterschied in λ_{\perp} für Stäbe \parallel und \perp zur binären Nebenachse, den die genannten Autoren gefunden haben, konnten wir mangels geeigneter Kristalle noch nicht nachprüfen.

6. *Elektrischer Widerstand im transversalen Magnetfelde.* Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem so ein, daß die z -Achse mit der trigonalen Hauptachse, die x -Achse mit einer zweizähligen Nebenachse zusammenfällt, die $+y$ -Richtung aus der Mitte einer der um die $+z$ -Achse gruppierten Flächen des Elementarrhomboeders austritt (Fig. 2).

Die el. Widerstandserhöhung im Transversalfeld¹⁾

$$v_H = \frac{\varrho_H}{\varrho_{H=0}}$$

geben wir für die vier untersuchten Stäbe nur durch die Fig. 3—6.

Fig. 2. Vereinfachtes Elementarrhomboeder von Bi

Bi 66 ($\varphi = 2^\circ$): In Fig. 3a die ziemlich genau sechszähligen symmetrischen Widerstandsschwankungen bei einer vollen Umdrehung des Magnetfeldes $H = 2520 \text{ Oe}$ von $\vartheta = -180^\circ$ bis $\vartheta = +180^\circ$. Die beiden Kurven bei -195° und -183°C zeigen den großen Einfluß der Temperatur. Die Beobachtungen bei 0°C geben im hier gewählten Maßstabe keinen deutlichen Effekt (vgl. Fig. 4).

1) Diese findet sich in der Literatur auch definiert als Widerstandszuwachs im Felde $\Delta \varrho$, dividiert durch ϱ_0 , den Widerstand für $H = 0$ und 0°C . Es gilt $\frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} = (v_H - 1) r$.

In Fig. 3b der Anstieg des Widerstands mit H im Maximum ($H \parallel y$) und Minimum ($H \parallel x$) der Widerstandskurven (links).

Bi 13 ($\varphi = 16^\circ$): Fast das gleiche Bild (Fig. 4a u. b) wie bei Bi 66, nur daß die 180° -Periode sich etwas deutlicher heraushebt.

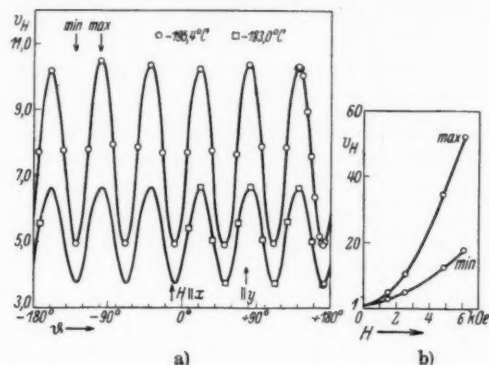


Fig. 3. a) Elektr. Widerstandsvergrößerung von Bi 66 ($\varphi = 2^\circ$) in $H = 2520$ Oe
b) v_H als Funktion von H bei -195.4°C

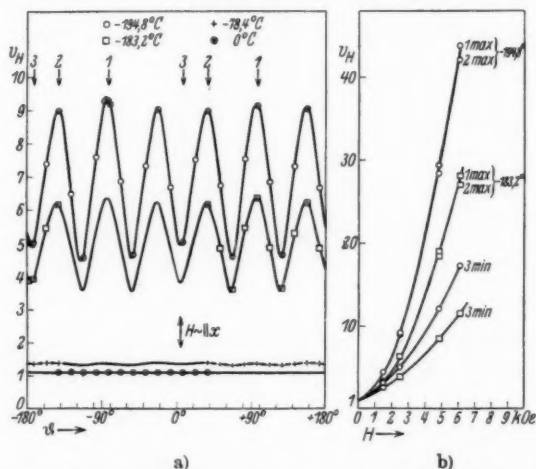


Fig. 4. a) Elektr. Widerstandsvergrößerung von Bi 13 ($\varphi = 16^\circ$) in $H = 2460$ Oe
b) v_H als Funktion von H bei -194.8° und -183.2°C

Der große Temperatureinfluß wird hier noch durch die Kurven bei 0° und -78.4°C belegt.

Bi 51 ($\varphi = 86^\circ$): In Fig. 5 das von Stierstadts Untersuchungen (4, II, S. 315) her bekannte Bild für Bi \perp . An Stelle der

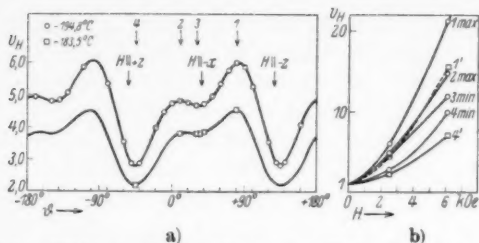


Fig. 5. a) Elektr. Widerstandsvergrößerung von Bi 51 ($\varphi = 86^\circ$) in $H = 2520$ Oe
b) v_H als Funktion von H bei $-194,8^\circ\text{C}$; 1' und 4' bei $-183,5^\circ\text{C}$

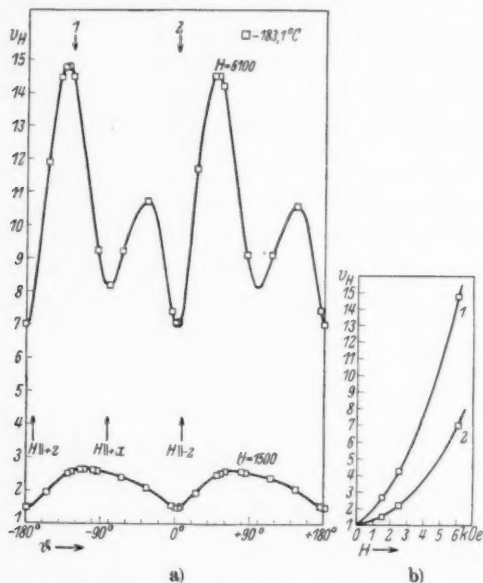


Fig. 6. a) Elektr. Widerstandsvergrößerung von Bi 72 ($\varphi = 85,5^\circ$) in $H = 1500$ und 6100 Oe; b) v_H als Funktion von H bei $-183,1^\circ\text{C}$

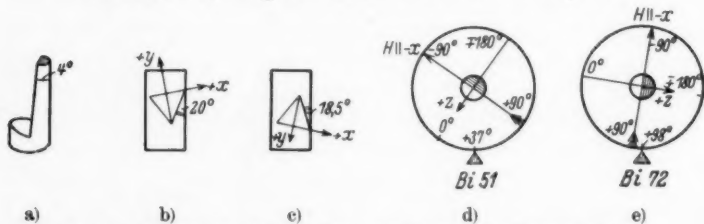


Fig. 7. Stellung der Stäbe Bi 51 und Bi 72 zum Magnetteilkreis.
In a), d), e) sind entsprechende Stabhälften schraffiert

60°-Periode eine solche von 180°. Das Widerstandsminimum liegt nicht genau bei $H \parallel \pm z$, weil die Stabachse nicht $\perp x$ steht, sondern beide Richtungen einen Winkel von etwa 80° bilden.

Bi 72 ($\varphi = 85,5^\circ$): In Fig. 6a erkennt man den Einfluß des Magnetfeldes auf die Kurvenform. Eine Ergänzung der Kurven für $H = 1500$ und 6100 Oe gibt die für 2520 Oe und $-183,5^\circ \text{C}$ in Fig. 5a. Daß die Kurven beider Figuren trotz der fast gleichen φ -Werte von Bi 51 und 72 spiegelbildlich liegen, rührt vermutlich daher, daß der Kristall 72 gegen 51 um die in der Basisebene liegende Horizontale $\frac{1}{2}$ mal herumgedreht war („auf den Kopf gestellt“). Fig. 7 soll diese Verhältnisse erläutern: a) gibt für Bi 51 und 72 die Lage der Hauptspaltebene, b) und c) den Blick auf die freigelegte Spaltebene mit den Dreieckspuren. Die x, y, z -Achsen sind in der oben festgesetzten Weise gewählt. Dann folgt aus d) und e), daß bei Rechtsdrehung des Magneteilkreises gegen die unten gezeichnete feste Marke, d. h. im Sinne wachsender ϑ , das Feld bei Bi 51 ungefähr die Richtungen $+z, -x, -z$, bei Bi 72 die Richtungen $+z, +x, -z$ durchläuft. Diesem umgekehrten Laufsinne entsprechen die Kurvenbilder.

7. Änderung der Wärmeleitung im transversalen Magnetfelde. Auch λ sinkt mit steigendem Magnetfelde, jedoch in viel geringerem

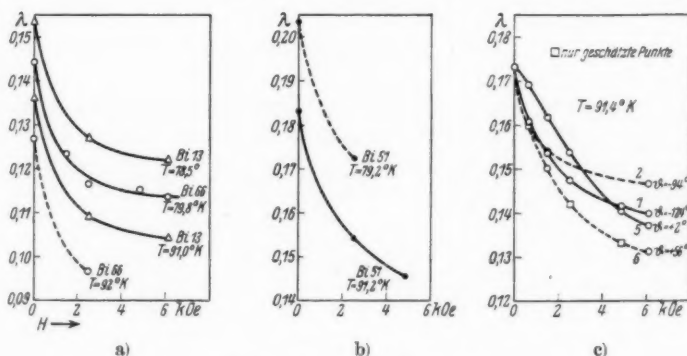


Fig. 8. λ als Funktion von H .

- a) Bi 66 und Bi 13 für mittl. ϑ ; b) Bi 51 für mittl. ϑ ;
c) Bi 72 für verschiedene H -Richtungen

Maße, als das el. L.-V. κ , nur etwa um 15–25% bei der Temperatur der flüssigen Luft und $H = 6100$ Oe (Fig. 8a bis c). Das stimmt mit früheren Befunden von Kaye und Higgins (12), sowie Banta (13) bei Zimmertemperatur, von Knapp (14), Reddemann (1)

und Rodine (15) in tiefer Temperatur überein. Ein Widerspruch besteht aber insofern, als der Abfall von λ mit H bei uns, wie auch bei Knapp (an vielkristallinem Bi!) verzögert erfolgt¹⁾, bei Kaye-Higgins und Banta beschleunigt. Der Grund liegt vielleicht im Unterschied der Temperaturen. Denn bei hoher Temperatur sind starke Magnetfelder erforderlich, um ähnliche Wirkungen hervorzubringen, wie schwache Magnetfelder in tiefer Temperatur. Wir halten für möglich, daß die beschleunigt abfallenden Kurven bei den genannten Autoren in sehr starken Feldern einen Wendepunkt erreichen würden, wie ihn unsere Kurve 5 für Bi 72 in Fig. 8c zeigt.

Auch bei Veränderung der Feldrichtung ϑ treten Schwankungen von λ auf. Reddemann hielt sie für unter der Fehlergrenze seiner Beobachtungen liegend. Rodine hat sie jedoch für $\text{Bi}_{||}$ und Bi_{\perp} durch Messung in 3 um 45° verschiedenen Richtungen nachgewiesen²⁾. Man kann sie nur finden, wenn man in jeder neuen Magnetstellung den stationären Zustand abwartet, was sehr zeitraubend ist.

Wir haben dies einwandfreie Verfahren bisher nur bei Bi 72 für alle ϑ von 30 zu 30° durchgeführt (vgl. Abschn. 8). Bei den anderen Stäben wurde zwar auch in ϑ -Abständen von je 15 oder 30° das Temperaturgefälle gemessen, jedoch meist ohne den stationären Zustand nach Drehung des Magneten abzuwarten. Wo dies geschehen ist, sind in Tabellen 2—4 die λ den entsprechenden ϑ zugeordnet

Tabelle 2

Bi 66; $l = 2,23 \text{ cm}$; $q = 0,0898 \text{ cm}^2$

t	H	ϑ	$\lambda_{\text{beob.}}$	T	$\alpha T \cdot 10^{-5}$	$\lambda_{\text{ber.}}$
-181,3 ₉	0	—	0,126 ₉	91,8	22,04	—
-180,9 ₆	2520	-161°	0,099 ₄	91,8	3,44	—
-193,5 ₉	0	—	0,144 ₉	79,6	21,60	0,1443
-193,4 ₉	1500	+108°	0,123 ₉	79,6	7,58	0,1240
-193,3 ₁	2520	-41°	0,116 ₉	79,6	2,25	0,1163
-193,3 ₁	4850	Mittel	0,115 ₉	79,6	1,32	0,1149
-193,2 ₇	6100	„	0,113 ₉	79,6	0,89	0,1143

1) Reddemann u. Rodine haben nur eine Feldstärke benutzt.

2) Rodines Messungen an Bi_{\perp} würden qualitativ mit den von uns in Abschn. 8 beschriebenen Messungen an Bi 72 übereinstimmen, wenn Rodine für Bi_{\perp} die Bezeichnungen $H \parallel \text{trig. Achse}$ und $H \perp \text{trig. Achse}$ verwechselt hätte. Für die Richtigkeit dieser Annahme spricht auch die Angabe Rodines (a. a. O. S. 912), daß die el. Widerstandsänderung in der Stellung $H \perp \text{Achse}$ ein Minimum habe, in der Stellung $H \parallel \text{Achse}$ aber größer sei. Nach Stierstadts (II, S. 315) und auch unseren Messungen dürfte für die Temperaturen und Feldstärken Rodines das Gegenteil richtig sein.

Tabelle 3

Bi 13; $l = 3,10$ cm; $q = 0,1452$ cm²

t	H	ϑ	$\lambda_{\text{beob.}}$	T	$\alpha T \cdot 10^{-5}$	$\lambda_{\text{ber.}}$
-182,1 ₉	0	—	0,136 ₁	78,5	21,50	0,1361
-181,9 ₇	2460	Mittel	0,109 ₉	78,5	4,69	0,1096
-181,9 ₇	2460	$\sim + 4^\circ$	0,110 ₁	78,5	6,14	0,1119
-181,9 ₇	2460	$+ 38^\circ$	0,108 ₀	78,5	3,44	0,1076
-181,9 ₈	6100	Mittel	0,104 ₂	78,5	1,36	0,1043
-194,7 ₁	0	—	0,153 ₅	91,0	20,96	0,1535
-194,5 ₃	2460	Mittel	0,127 ₁	91,0	3,38	0,1268
-194,5 ₃	2460	$- 4^\circ$	0,128 ₁	91,0	3,49	0,1270
-194,5 ₃	2460	$+ 38^\circ$	0,123 ₆	91,0	2,36	0,1253
-194,5 ₃	6100	Mittel	0,122 ₀	91,0	0,87	0,1230
-194,5 ₃	6100	$+ 38^\circ$	0,122 ₇	91,0	0,50	0,1225

Tabelle 4

Bi 51; $l = 2,18$ cm; $q = 0,0749$ cm²

t	H	ϑ	$\lambda_{\text{beob.}}$	T	$\alpha T \cdot 10^{-5}$	$\lambda_{\text{ber.}}$
-182,1 ₃	0	—	0,182 ₉	91,2	22,3 ₂	0,1828
-181,9 ₈	2520	-152° *)	0,154 ₂	91,2	6,0 ₃	0,1527
-181,9 ₈	4900	-152° *)	0,145 ₇	91,2	3,0 ₃	0,1471
-194,0 ₆	0	—	0,203 ₁	79,1	21,2 ₉	—
-193,8 ₇	2520	Mittel	0,172 ₂	79,1	4,6 ₂	—

*) im Sattel der v_H -Kurve Fig. 5.

(in der Regel an den Stellen der Maxima und Minima des elektr. Widerstands). Im übrigen haben wir ein über alle beob. ϑ gemitteltetes Temperaturgefälle zur Berechnung eines „mittleren“ λ benutzt. So ist die Bezeichnung „Mittel“ in Tabellen 2—4 zu verstehen. Über die $\lambda_{\text{ber.}}$ vgl. Abschn. 10.

8. *Einfluß der Feldrichtung bei Bi 72 (\sim Bi₁).* Schon Fig. 8c zeigt, wie verschieden ein wachsendes transv. Magnetfeld in verschiedenen Richtungen auf λ wirkt. Ein vollständiges Bild der Abhängigkeit des λ von ϑ für 2 Feldstärken bei -183° C gibt Fig. 9 und Tab. 5. Beobachtungen für zwischenliegende Feldstärken wurden nur bei $\vartheta = +2^\circ$ und -124° gemacht (Tab. 5) und in Figg. 8c, 11 und 12 verwertet.

Nach Fig. 9 betragen die Schwankungen von λ , in Prozent des durch eine Gerade dargestellten Wertes für $H = 0$, bei $H = 1500$ Oe bis 7%, bei $H = 6100$ Oe bis 9% (rechte Skala). Das Merkwürdigste ist aber, daß die Grundperiode der Schwankungen, die bei der el. Widerstandskurve (Fig. 6) 180° betrug, hier um so undeutlicher

Tabelle 5

Bi 72; $l = 2,51$ cm; $q = 0,0907$ cm²; $T = 91,3^\circ$ K

t	H	ϑ	λ	$\kappa T \cdot 10^{-5}$	t	H	ϑ	λ	$\kappa T \cdot 10^{-5}$
-181,90	0	—	0,173 ₃	21,07	-181,91	2520	+ 2°	0,153 ₇	9,76
-181,85	650	+ 2°	0,169 ₁	18,34	-181,86	2520	-124°	0,147 ₄	5,12
-181,89	650	-124°	0,160 ₈	13,25	-181,60	4900	+ 2°	0,140 ₃	4,45 ^{*)}
-181,92	1500	+ 2°	0,161 ₇	14,24	-181,59	4900	-124°	0,141 ₆	2,16 ^{*)}
-181,87	1500	+ 32°	0,154 ₄	10,08	-181,76	6100	+ 2°	0,137 ₁	3,09
-181,82	1500	+ 62°	0,150 ₁	8,26	-181,85	6100	+ 32°	0,132 ₃	1,67
-181,79	1500	+ 86°	0,149 ₃	8,46	-181,85	6100	+ 56°	0,131 ₂	1,54
-181,81	1500	+116°	0,149 ₃	9,04	-181,83	6100	+ 86°	0,133 ₇	2,40
-181,82	1500	+146°	0,153 ₃	10,45	-181,84	6100	+116°	0,137 ₁	2,40
-181,88	1500	-178°	0,162 ₅	14,34	-181,62	6100	+146°	0,139 ₄	2,07
-181,83	1500	-148°	0,156 ₃	10,08	-181,64	6100	-178°	0,138 ₃	3,12
-181,83	1500	-124°	0,153 ₃	8,39	-181,62	6100	-148°	0,135 ₃	1,67
-181,84	1500	- 94°	0,153 ₃	8,36	-181,70	6100	-124°	0,139 ₃	1,52
-181,85	1500	- 64°	0,153 ₆	8,97	-181,87	6100	- 94°	0,146 ₅	2,37
-181,85	1500	- 34°	0,154 ₆	10,38	-181,87	6100	- 64°	0,144 ₃	2,37
—	—	—	—	—	-181,89	6100	- 34°	0,138 ₃	2,04

*) interpoliert.

wird, je stärker H wird. Umkehr der H -Richtung ändert also im allgemeinen den Wert von λ . Nur in Richtung der trig. Achse dürfte der Einfluß der Feldumkehr innerhalb der Versuchsfehlergrenzen liegen.

Deutlicher wird dieser Einfluß durch Fig. 10a und b. In Fig. 10a ist der von der Feldumkehr unabhängige Teil der Fig. 9 mit der Grundperiode 180° gezeichnet, nämlich $\frac{1}{2}(\lambda_\vartheta + \lambda_\vartheta + \pi)$, in Fig. 10b nur der von der Feldumkehr abhängige Teil $\frac{1}{2}(\lambda_\vartheta - \lambda_\vartheta + \pi)$. Der erste enthält die Perioden $360^\circ/2n$, der zweite die Perioden $360^\circ/(2n+1)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Der zweite Anteil ist bei 6100 Oe schon relativ groß.

9. *Ursprung der Perioden $360^\circ/(2n+1)$.* Wir haben zunächst vermutet, das Auftreten der Periode 360° und ihrer ungeradzahigen Teile beruhe auf unbeabsichtigten Effekten. Ein solcher könnte entstehen, wenn die beiden Th.-El.-Kontakte nicht genau auf einer Stromlinie übereinanderliegen. Dann könnte eine zu H und Wärmestrom J_w transversale Temperaturdifferenz (1. Righi-Leduc-Effekt) z. T. an den Kontaktstellen wirksam werden, die zugleich mit H ihr Vorzeichen ändern müßte. Ebenso mit J_w . Dies konnten wir zwar mit unserer Anordnung nicht nachprüfen, wohl aber suchten wir aus unseren el. Widerstandsmessungen eine Entscheidung zu gewinnen. Hier hätte bei der angenommenen seitlichen Verschiebung der Kontaktstellen ein Hall- oder Ettingshauseneffekt entstehen müssen, dessen Vorzeichen sich mit dem von J_{el} zugleich umkehrte. Im Protokoll der el. Widerstandsmessung von Bi 72 fanden wir in der Tat nach-

Fig. 9.

Bi 72; λ als Funktion
von ϑ in $H = 1500$ und
6100 Oe bei -182°C

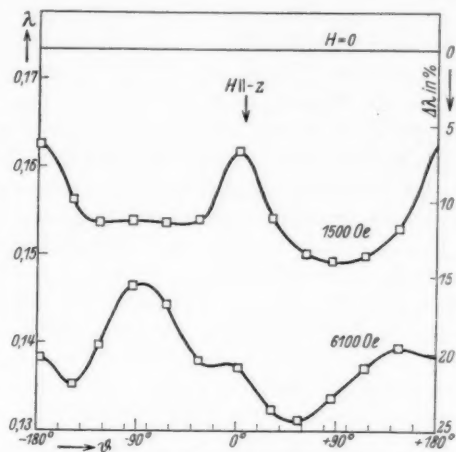


Fig. 10a.

Teilkurven der Fig. 9
mit der
Grundperiode 180°

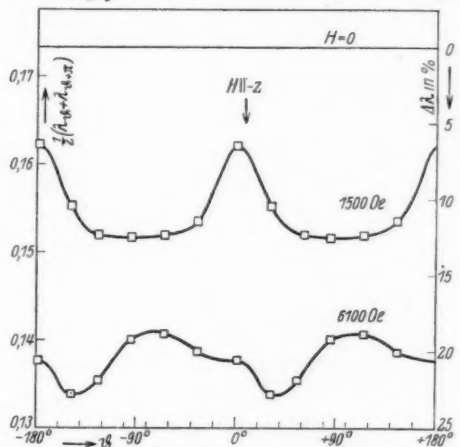
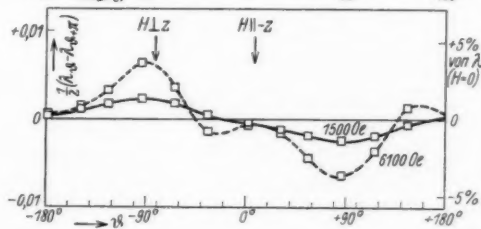


Fig. 10b.

Teilkurven der Fig. 9
mit der
Grundperiode 360°



träglich bei 6100 Oe einen zwar kleinen, aber doch deutlichen Kommutierungseffekt von der Grundperiode 360° , der bis zu etwa $\pm 1\%$ der Potentialdifferenz im Magnetfelde betrug.

Trotzdem glauben wir nicht, daß in der Lage der Kontaktstellen die Ursache für die W.-L.-Änderung mit den Perioden $360^\circ/(2n+1)$ zu suchen ist. Denn wenn auch eine sehr kleine und leicht mögliche Verschiebung der Kontaktstellen genügen würde, um den beobachteten elektr. Kommutierungseffekt als Halleffekt zu deuten, so genügt diese Verschiebung nach bisheriger Kenntnis (6) bei weitem nicht, um die 360° -Periode von λ durch den 1. Righi-Leduc-Effekt zu erklären.

Es bleibt also, wenn man die Kohlerschen Folgerungen (5) für den el. Widerstand auf den thermischen überträgt, wohl nur der Schluß, daß die W.-L.-Änderung im transv. Magnetfeld nicht nur von geraden, sondern auch von ungeraden Potenzen von H abhängt.

10. Elektronen- und Gitterleitung (λ_e, λ_g). Fig. 8 lehrt, daß die von uns erreichten Feldstärken nicht ausreichen, um λ für $H = \infty$

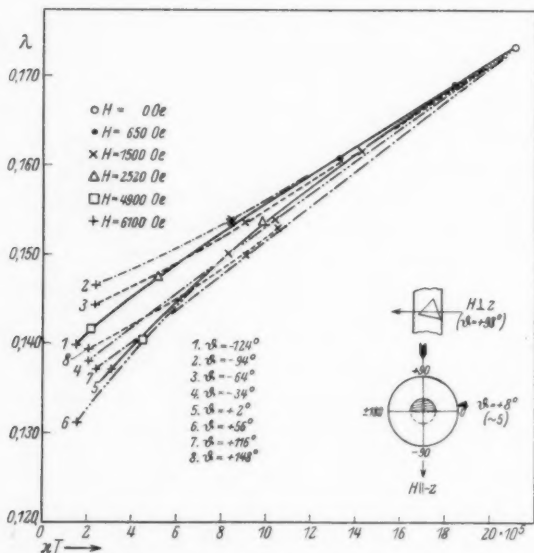


Fig. 11. Bi 72 ($\varphi = 85,5^\circ$). λ als Funktion von xT bei $-181,8^\circ \text{C}$ in magnetischen Feldern verschiedener Richtung und Stärke

zu extrapolieren. Diesen Wert könnte man sonst nach Abschn. 1 als λ_g ansprechen. Doch zeigt Fig. 8c, daß solche Extrapolation für ver-

schiedene H -Richtungen (ϑ) vermutlich zu verschiedenen λ_g -Werten führen würde.

Wir können auch anders verfahren. Falls die Gitterleitung λ_g vom Magnetfelde unbeeinflußt bleibt, λ_c aber sich proportional mit x ändert, wenn H wächst, T konstant bleibt, so müßte $\lambda = \lambda_c + \lambda_g$ eine lineare Funktion von $x T$ sein, die leicht extrapoliert werden könnte.

Fig. 11 zeigt für Bi 72, daß die Dinge nicht so einfach liegen. Die W.-L. λ ist keine eindeutige Funktion von x . Vielmehr gehen von dem Punkt $\lambda_{H=0}$ rechts oben die den verschiedenen ϑ entsprechenden Kurven garbenartig auseinander, z. T. sich überkreuzend, so daß auch hier eine Extrapolation auf $x = 0$ ($H = \infty$) unmöglich erscheint. So wirkt sich die verschiedene Periodizität der el. Widerstands- und W.-L.-Kurven aus.

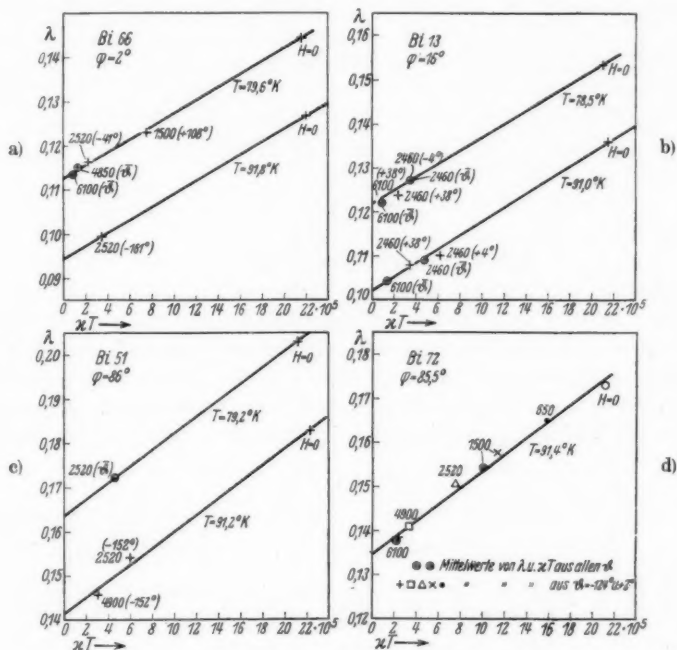


Fig. 12. λ als Funktion von $x T$

Bildet man jedoch (Fig. 12d) bei jeder Feldstärke Mittelwerte von λ und $x T$ über den ganzen ϑ -Bereich, so erhält man Punkte, denen man schon eher eine Gerade zuordnen kann, wenn auch eine

gegen die (κT)-Achse schwach konkav gekrümmte Kurve den Beobachtungen besser genügen würde.

Auch für die Stäbe 66, 13 und 51 sind in Fig. 12 die λ aus Tabellen 2—4 als Funktion der zugehörigen κT aufgetragen und durch Geraden verbunden. Die $\lambda_{\text{ber.}}$ in Tabellen 2—4 entsprechen diesen Geraden.

Wir wollen die Abschnitte auf den Ordinatenachsen einmal als Gitterleitungswerte λ_g annehmen, dann gibt $\lambda_{\text{beob.}} - \lambda_g = \lambda_e$ die Elektronen-W.-L. und die Neigungstangente der Geraden

$$\frac{d\lambda}{d(\kappa T)} = \frac{\lambda_e}{\kappa T} = L_e$$

die Wiedemann-Franz-Lorenzsche Zahl für die reine Elektronenleitung der Bi-Kristalle. Die entsprechenden Zahlwerte gibt Tab. 6. Charakteristisch ist die große Gitterleitung, die mit sinkender Temperatur zunimmt, während λ_e abnimmt. Dies könnte mit der Unreinheit unseres Bi zusammenhängen, denn nach Grüneisen und Reddemann(8) ist der Einfluß von Gitterstörungen auf die Elektronenleitung stärker als auf die Gitterleitung. Diese könnte also, wie beim reinen Kristall, mit sinkender Temperatur noch zunehmen, während jene bereits abnimmt.

Wie schon für λ bekannt (11, 12), so gilt auch für λ_g und λ_e einzeln, daß Bi_{\perp} besser leitet als Bi_{\parallel} .

Besonders interessiert der Vergleich der L_e mit den für die Gesamt-W.-L. geltenden $L_{\text{beob.}}$. Denn diese sind bekanntlich gegenüber dem universellen, von Sommerfeld für hohe Temperatur zu $2,44 \cdot 10^{-8}$ berechneten Grenzwert viel zu groß und wurden von Eucken(16) schon früher als Anzeichen großer Gitterleitung gewertet. Tab. 6 zeigt, daß die L_e wie erwartet stark gesenkt sind. Nun wird aber die Zahl 2,44 besonders bei Bi_{\parallel} stark unterschritten, wofür die

Tabelle 6

	t	$\lambda_{\text{beob.}}$	λ_g	λ_e	$L_{\text{beob.}} \cdot 10^8$	$L_e \cdot 10^8$
Bi 66 ($\varphi = 2^\circ$)	- 181,39	0,126 ₈	0,094 ₄	0,032 ₄	$\sim 5,8$	1,47
	- 193,59	0,144 ₃	0,113 ₀	0,031 ₃	$\sim 6,8$	1,45
Bi 13 ($\varphi = 16^\circ$)	- 182,19	0,136 ₁	0,102 ₂	0,033 ₉	$\sim 6,4$	1,57 ₇
	- 194,71	0,153 ₅	0,121 ₇	0,031 ₈	$\sim 7,3$	1,51 ₇
Bi 51 ($\varphi = 86^\circ$)	- 182,13	0,182 ₈	0,141 ₅	0,041 ₃	$\sim 8,3$	1,85 ₀
	- 194,06	0,203 ₁	0,163 ₇	0,039 ₄	$\sim 9,6$	1,85 ₄
Bi 72 ($\varphi = 85,5^\circ$)	- 181,84	0,173 ₈	0,134 ₇	0,039 ₇	$\sim 8,3$	1,88

Erklärung fehlt. Denn wenn auch bei anderen reinen Metallen L_e mit dem Absinken von T/Θ unter 1 beschleunigt gegen 0 abfällt, so sollte doch beim Bi mit seinem kleinen Θ (Debye) solcher Abfall bei -190° noch wenig merkbar sein. Eucken (17) hat sogar die Ansicht vertreten, daß für Bi von -190°C noch mit einem nicht entarteten Elektronengas zu rechnen sei.

Der Versuch, durch transversale Magnetfelder Elektronen- und Gitterleitung zu trennen, befriedigt also noch nicht, weil bis zu den bisher benutzten Feldstärken die Trennung nicht eindeutig ist, sondern von der Feldrichtung abhängt, und daher auch zweifelhaft ist, ob die nach Mittelung über die Feldrichtungen vorgenommene geradlinige Extrapolation zu richtigen λ_g -Werten führt. Wie oben gesagt, würde eine gegen die ($\propto T$)-Achse schwach konkav gekrümmte Kurve den Beobachtungen in Fig. 12d besser genügen und kleineres λ_g , größere λ_e und L_e liefern. Man wird durch Anwendung stärkerer Felder feststellen müssen, ob die Kurven in Fig. 8c und in Fig. 11 überhaupt einem bestimmten λ_g -Wert zustreben. Sollte dies nicht der Fall sein, so müßte man einen Einfluß des Magnetfeldes auf die Gitterleitung oder wenigstens auf die Wechselwirkung von Elektronen- und Gitterleitung annehmen und damit entfielen die Berechtigung, mit dem einfachen Ansatz $\lambda = \lambda_e + \lambda_g$ zu rechnen.

Zusammenfassung

11a) Wärme- und Elektrizitätsleitung von 4 Bi-Kristallstäben verschiedener Orientierung werden bei -183 und -195°C in transversalen Magnetfeldern von 650—6100 Oe gemessen. Dabei wird die Feldrichtung in der zum Stabe senkrechten Ebene von 30 zu 30° , im ganzen um 360° gedreht.

b) Die W.-L. sinkt bei fester Feldrichtung mit steigendem Felde verlangsamt und dürfte einem Grenzwert zustreben, der etwa 20 — 30% unter dem feldfreien Werte liegt, während die E.-L. auf einen kleinen Bruchteil sinkt.

c) Wie die E.-L., so zeigt auch die W.-L. bei einer vollen Umdrehung der Magnetfeldrichtung um 360° Schwankungen, und zwar um mehrere Prozent. Ein Unterschied gegen die E.-L. besteht bei Bi_\perp darin, daß diese Schwankungen sich keineswegs mit einer Fourierreihe der Perioden $360^\circ/2n$ darstellen lassen, sondern auch die Perioden $360^\circ/(2n+1)$ enthalten ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$), und zwar relativ um so stärker, je stärker das Magnetfeld ist.

d) In stärkeren Feldern ist die W.-L. im allgemeinen keine eindeutige Funktion der E.-L. Mittelt man jedoch über alle Feld-

richtungen, so tritt ein nahe linearer Zusammenhang zwischen W.-L. und E.-L. deutlich zutage.

e) Extrapoliert man die entsprechenden Geraden nach $H = \infty$, also verschwindender E.-L., so erhält man eine W.-L., die den auf Elektronenleitung beruhenden Anteil nicht mehr enthalten, also mit der Gitterleitung identisch sein sollte. Es zeigt sich jedoch, daß die Elektronenleitung etwas kleiner herauskommt, als man sie nach der zu erwartenden Wiedemann-Franz-Lorenzschen Zahl schätzen würde.

Der Helmholtz-Gesellschaft danken wir für die Bereitstellung des Elektromagneten.

Literaturverzeichnis

- 1) H. Reddemann, Ann. d. Phys. [5] **20**. S. 441. 1934.
- 2) P. Kapitza, Proc. Roy. Soc. London (A) **119**. S. 358 u. 401. 1928.
- 3) W. J. de Haas u. L. Schubnikow, Comm. Leid. Nr. 207a, 207c, 207d, 210a, 210b; Proc. Amst. Akad. **33**. S. 130, 350, 363, 418, 433. 1930.
- 4) O. Stierstadt, Ztschr. f. Phys. **80**. S. 636 (I); **85**. S. 310 (II); **85**. S. 697 (III). 1933; **87**. S. 687. 1934 (IV); **93**. S. 676. 1935 (V); **95**. S. 355. 1935 (VI).
- 5) M. Kohler, Ztschr. f. Phys. **95**. S. 365. 1935.
- 6) Vgl. W. Meißner, Hdb. der Exp.-Physik XI, 2. Teil, 1935, S. 312.
- 7) E. Grüneisen u. E. Goens, Ztschr. f. Phys. **44**. S. 615. 1927.
- 8) E. Grüneisen u. H. Reddemann, Ann. d. Phys. [5] **20**. S. 843. 1934.
- 9) L. Schubnikow u. W. J. de Haas, Comm. Leid. 207c; Proc. Amst. Akad. **33**. S. 350. 1930.
- 10) W. Meißner, Hdb. der Exp.-Physik XI, S. 67.
- 11) W. J. de Haas u. W. H. Capel, Comm. Leid. 233a; Physica **1**. S. 929. 1933/34.
- 12) G. W. C. Kaye u. W. F. Higgins, Phil. Mag. **8**. S. 1056. 1929.
- 13) H. E. Banta, Phys. Rev. **41**. S. 239. 1932.
- 14) E. J. Knapp, Phys. Rev. **39**. S. 550. 1932.
- 15) M. T. Rodine, Phys. Rev. **46**. S. 910. 1934.
- 16) A. Eucken u. O. Neumann, Ztschr. f. Phys. Chem. **111**. S. 431. 1924.
- 17) A. Eucken u. F. Förster, Gött. Nachr. **1**. S. 43. 1934.

Marburg a. L., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 18. März 1936)

**Dunkle Streifen in den Spektren
von akustischen und optischen Doppelgittern**

Von P. Cermak und H. Schoeneck

(Mit 9 Figuren)

Die Anwendung der von R. Pohlman¹⁾ beschriebenen Versuchsanordnung auf Flüssigkeiten führte uns zur Beobachtung von dunklen Streifen, die bei dieser Reflexionsmethode in den Debye-Sears-Spektren auftreten und für ultraakustische Messungen von Bedeutung sein können. Die Erscheinung, die wir auch an optischen Strichgittern wiederfanden, soll im folgenden beschrieben werden.

Fig. 1 zeigt unsere Anordnung und läßt die Abänderung gegen die Anordnung Pohlmanns erkennen. Vom beleuchteten Spalt Sp ausgehend wird das Licht durch ein Steinheilobjektiv von 110 cm Brennweite parallel gemacht, trifft hinter dem Trog T , in dem mit

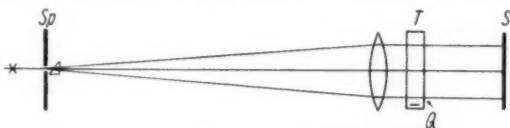


Fig. 1. Versuchsanordnung

Hilfe eines Piezoquarzes Q stehende Ultraschallwellen erregt werden, auf den Spiegel S und wird, den gleichen Weg zurücklaufend, wiedervereint auf dem 45° -Prisma, auf dessen einer Seitenfläche Spalt und Debye-Sears-Spektren abgebildet werden. [Dort können auch beliebige Ordnungen der Spektren ausgeblendet werden²⁾]. Das vom Prisma zur Seite geworfene Licht kann mit einem Fernrohr beobachtet oder vergrößert auf einen Schirm projiziert bzw. photographiert werden.

Bildet man die in der Brennebene entstehenden Debye-Sears-Spektren vergrößert ab, so zeigen sich bei nicht zu engem Spalte in den Spektren ein oder mehrere dunkle Streifen, deren Zahl mit der Spaltbreite wächst. Die dunklen Streifen sind dann scharf abgebildet, wenn auch Spalt und Spektren scharf eingestellt sind. Bildet man den Spalt nicht scharf ab, so werden die Streifen un-

1) R. Pohlman, Naturw. **23**. S. 511. 1935.

2) R. Bär, Helv. Phys. Acta **6**. S. 570. 1933; S. S. 591. 1935.

deutlich oder sie verschwinden. Das unterscheidet sie wesentlich von den durch sekundäre Interferenz entstehenden „Schlieren“, die Hiedemann, Bachem u.a. beschrieben haben¹⁾. Fig. 2 zeigt eine Aufnahme dieser Streifen beim Teilton 10 ($7,79 \cdot 10^6$ Hz; $1,67 \cdot 10^{-2}$ cm Wellenlänge in Toluol) unseres Quarzes (Grundfrequenz = $0,779 \cdot 10^6$ Hz). Bei sehr engem Spalte sind die Streifen nicht sichtbar.



Fig. 2. Streifen bei senkrechtem Spalt, weißes Licht.
Frequenz $7,79 \cdot 10^6$ Hz

Wird nun der Spalt gedreht, so daß er z. B. 30° mit dem Lote bildet, so werden in den schräg gestellten Spektren aller Ordnungen (mit Ausnahme der nullten) die Streifen auch bei engem Spalte wahrnehmbar. Sie sind bei weißem Lichte gegen die Lotrechte um den gleichen Winkel wie der Spalt, aber im entgegengesetzten Sinne gedreht.

Fig. 3 für den Teilton 10 und Fig. 4 für den Teilton 3 zeigen die Streifen in den schrägen Spaltbildern bei gleichem Abstand zwischen Spiegel und Trog. Fig. 4 läßt auch erkennen, daß den schwarzen Streifen in den Spektren eine größere Intensität im Bilde der nullten Ordnung entspricht.

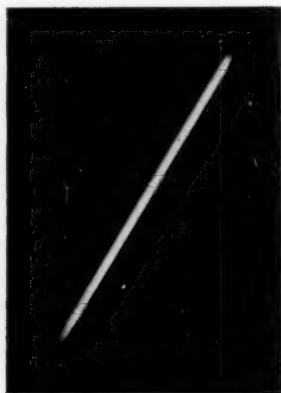


Fig. 3. Spalt um 30° gedreht.
Frequenz $7,79 \cdot 10^6$ Hz



Fig. 4. Spalt um 30° gedreht.
Frequenz $2,34 \cdot 10^6$ Hz

1) E. Hiedemann, H. R. Asbach u. Ch. Bachem, Ztschr. f. Phys. 87. S. 734. 1934.

Der Abstand dieser Streifen erweist sich genau proportional der Gitterkonstanten, also der Wellenlänge der Ultraschallwellen, solange die Entfernung zwischen Trog und Spiegel konstant bleibt. Nähert man den Spiegel dem Troge, so nimmt der Streifenabstand zu, wächst bei der halben Entfernung aufs Doppelte, bei einem Viertel der Entfernung aufs Vierfache usw. (Ein Spiegel, im Troge angebracht, erzeugt keine Streifen).

Die dunklen Streifen bieten daher ein exaktes und einfaches Mittel, um Ultraschallwellenlängen zu vergleichen, solange die Amplitude der Wellen ausreicht, um deutliche Spektren zu liefern. Die Abhängigkeit vom Spiegelabstande bewirkt, daß dieses Mittel für weite Frequenzbereiche brauchbar bleibt, da man diesen Abstand dem Frequenzbereiche anpassen kann. Bei subjektiver Beobachtung mit dem Fernrohr kann man leicht mehrere Spektren gleichzeitig beobachten und den Streifenabstand auf der Okularskala ausmessen.

Eine Abhängigkeit des Streifenabstandes von der Ordnungszahl der Spektren ist in den Figuren nicht erkennbar.

Bei langsamer Änderung der Entfernung zwischen Trog und Spiegel bemerkt man aber, daß die Streifenzahl im zweiten Spektrum sich periodisch verdoppelt und wieder gleich der im ersten Spektrum wird; und zwar geschieht das für verschiedene Farben bei verschiedenen Entfernungen, so daß z. B. im Rot und Blau die Streifenzahl einfach, im Grün dagegen doppelt erscheint.

Im einfarbigen Lichte einer Na-Lampe sind die Streifen stets lotrecht, also parallel den Knotenebenen der Ultraschallwellen. Bestätigt wird das durch folgenden Versuch: Erzeugt man durch einen 45°-Reflektor ein akustisches Kreuzgitter, so erhält man im homogenen Lichte zwei sich kreuzende Streifensysteme, die genau parallel den sich kreuzenden Gitterschichten liegen.

Beleuchtet man gleichzeitig mit einer Quarz-Quecksilberlampe und mit einer hellen Fadenlampe, so liegen die Streifen im kontinuierlichen Spektrum geneigt; in den Spektrallinien des Quecksilbers sind sie lotrecht, in den einzelnen Spaltbildern etwas gegeneinander versetzt und in jeder Ordnung überall von gleichem Abstände. Die Schrägstellung kommt demnach zustande durch die Aneinanderreihung der lotrechten Streifen in den einzelnen Farben des kontinuierlichen Spektrums.

Da bei den bisher beschriebenen Versuchen das parallele Licht zweimal das gleiche akustische Gitter durchläuft, liegt die Vermutung nahe, daß man ähnliche Streifen auch erhalten wird, wenn paralleles Licht ein optisches Strichgitter in der gleichen Anordnung doppelt durchsetzt. Es wurden deshalb Gitter verschiedener

Strichweite an die Stelle des Trogens in der Fig. 1 gebracht. Die Versuche hatten den gleichen Erfolg, auch mit der Kopie eines Rowlandgitters, bei der freilich entsprechend der kleinen Gitterkonstanten die Entfernung des Spiegels vom Gitter nur wenige Millimeter sein durfte, damit die Streifen nicht zu eng lagen. (Bei akustischen Gittern der oben angegebenen Gitterkonstanten konnten die Streifen noch bei einem Spiegelabstand von etwa einem Meter deutlich wahrgenommen werden.)

Da es nun gleichgültig sein muß, ob der doppelte Lichtdurchgang mittels Spiegelung erzeugt wird oder ob das Licht zwei



Fig. 5. Zwei Strichgitter ($d = \frac{1}{500}$ cm), Spalt lotrecht. Weißes Licht.
Nullte Ordnung abgeblendet

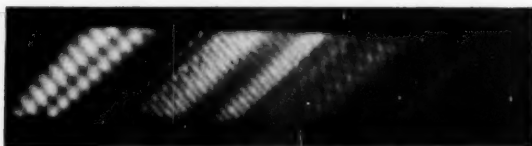


Fig. 6. Zwei Strichgitter in gleicher Anordnung wie Fig. 5.
Spalt um 45° gedreht

gleiche Gitter in geeignetem Abstände hintereinander durchdringt, wiederholten wir die Versuche mit zwei gleichen Glasgittern von je 500 Strichen auf 1 cm. Zwei ganz gleiche Gitter erhielten wir dadurch, daß wir ein Gitter senkrecht zu seinen Strichen teilten. Nach dem Durchgange vereinigten wir die parallelen Strahlen mit einer Leitzlinse von 20 cm Brennweite. Die entstehenden Beugungsspektren wurden vergrößert auf einem Schirme oder auf einer Photoplatte abgebildet. Fig. 5 zeigt eine solche Aufnahme der Spektren 1., 2., 3. Ordnung bei senkrechtem mit weißem Licht beleuchteten Spalte, Fig. 6 den gleichen Fall bei Neigung des Spaltes um 45° . Auf beiden Bildern ist die nullte Ordnung abgeblendet. Man sieht, daß in allen Ordnungen dunkle Streifen auftreten, daß aber mehrere Arten solcher Streifen sich überlagern; daß insbesondere nach Drehung des Spaltes Streifen verschiedener Neigung vorhanden

sind, die miteinander eigenartige Wabenstrukturen ergeben. Es stören die Empfindlichkeitsmaxima der Photoplatte, die — besonders auffallend in Figur 5 — breite unregelmäßige Streifengebilde überlagern. Sie beruhen auf der selektiven Farbwiedergabe des verwandten panchromatischen Materials. Die dunklen Streifen sind übrigens auch beim Durchgange schwach konvergenten oder des natürlich divergenten vom Spalt kommenden Lichtes (ohne Linsen) im Bilde des Spektrums nachweisbar; sie sind dann nicht schwarz und verändern die Farbenfolge der Spektren.

Die in Fig. 6 sichtbaren Streifen ändern ihre Lage, wenn der Beleuchtungsspalt gedreht wird. Eine Sorte, die deutlichste, hat in allen Ordnungen die gleiche Neigung und dreht sich in umgekehrter Richtung wie der Spalt. Es ist die gleiche wie die in den Figg. 3 und 4 an den akustischen Gittern sichtbar gewordene. Der Abstand dieser Streifen wird in höheren Ordnungen kleiner und zwar so, daß das Produkt aus Streifenabstand und Ordnungszahl des Spektrums konstant bleibt.

Um genauen Aufschluß über die Natur der verschiedenen Streifenarten zu erhalten, stellten wir wiederum Beobachtungen in monochromatischem Lichte an (Na- bzw. Hg-Lampe). Im einfarbigen Lichte bleiben die Streifen für alle Spaltwinkel (Spaltwinkel sei der Winkel, den der Spalt mit der Lotrechten bildet den Gitterstrichen parallel, bei uns also lotrecht. Die Streifenbreite ist unabhängig von der Spaltweite. Der Abstand der Streifen ist umgekehrt proportional der Entfernung der beiden Gitter. In den aufeinander folgenden Ordnungen ändert er sich so, daß das Produkt aus Ordnungszahl und Streifenabstand konstant bleibt. Wenn z. B. die $(n + 1)$ te blaue Hg-Linie zu kleinerem Winkel gebeugt wird als die n te gelbe Linie, so hat diese blaue Linie kleineren Streifenabstand als die n te gelbe. Kleine Änderungen des Gitterabstandes bewirken merkliche Änderungen in der Schärfe der Streifen. Gelegentlich beobachtet man dabei, daß noch feine dunkle Streifen zwischen den breiten auftreten, die sich periodisch von diesen abzulösen scheinen.

Beleuchtet man den Spalt gleichzeitig mit Quecksilber- und mit weißem Licht, so erhält man wieder in den durch die Hg-Linien betonten Spektralgebieten die lotrechten Streifen, in den dazwischen liegenden Gebieten nur die schrägen Streifen. Das zeigt die Fig. 7¹⁾.

1) Bei genauer Beobachtung der Fig. 7 ist zu erkennen, daß nicht jedem lotrechten Streifen der Hg-Linien ein schräger Streifen des kontinuierlichen Spektrums entspricht. Bei subjektiver Beobachtung konnten wir feststellen, daß die Abweichung dadurch zustande kommt, daß bei der Aufnahme der be-

Die Ergebnisse unserer Versuche können wir zusammenfassen in dem Ansatz

$$N = \text{const} \cdot \frac{\lambda \cdot m}{d};$$

es bedeuten N die Streifenzahl auf der Längeneinheit (gemessen in der Richtung, die senkrecht auf der optischen Achse und auf der



Fig. 7. Beleuchtung mit weißem und Hg-Licht, Spalt um 45° gegen den Uhrzeigersinn gedreht

Gitterstrichrichtung steht¹⁾, λ die Entfernung der beiden Gitter, d die Gitterkonstante (bzw. die akustische Wellenlänge) und m die Ordnungszahl des Spektrums.

Die Streifenzahl ist nach unseren Versuchen von der Wellenlänge nicht merkbar abhängig. Daher dürften die beschriebenen Erscheinungen für spektroskopische Untersuchungen nicht verwendbar sein, obwohl zwischen den zusammenwirkenden Bündeln sehr hohe Gangunterschiede (bis zu 10^5 Wellenlängen) vorhanden sind.

Betont sei nochmals, daß die Abhängigkeit der Streifenzahl von der Ordnung der Spektren bei der Beobachtung der akustischen Gitterspektren nicht immer so klar zu erkennen ist, wie bei den optischen Gittern. Dazu trägt bei, daß in der 2. bzw. 3. Ordnung oft jeder 2. bzw. 3. dunkle Streifen betont, breiter ist, so daß die Zahl der betonten Streifen mit der Zahl der Streifen im 1. Spektrum übereinstimmt.

Versuche, die dunkeln Streifen auch beim Durchgange des Lichtes durch zwei Gitter verschiedener Strichweite zu erhalten ($d = \frac{1}{400}$ und $d = \frac{1}{500}$ cm), gelangen nicht.

Wenn wir im durchgehenden weißen Lichte die auf einem Schirme möglichst scharf abgebildeten gestreiften Spektren bei genau

leuchtete Spalt und der leuchtende Faden der Lampe nicht gleichzeitig scharf eingestellt waren. Setzt man unmittelbar vor den Spalt eine Mattscheibe, so entspricht jedem lotrechten Streifen ein schräger, so daß damit unsere Behauptung gestützt wird, daß sich die schrägen Streifen aus der Aneinanderreihung der lotrechten ergeben.

1) Mißt man den Streifenabstand (oder ihre Zahl) in der oben beschriebenen Art, so bleibt er für alle Spaltwinkel in jeder einzelnen Ordnung der gleiche.

ausgerichteten Gittern und bei verschiedenen Spaltlagen beobachteten, so konnten wir mehrere Streifensorten erkennen; Fig. 6 gibt dafür ein Beispiel. Wir haben versucht, in Fig. 8 diese verwickelten Erscheinungen für die 5 Arten, die wir zu unterscheiden vermochten, graphisch darzustellen und zwar für den Fall einer Drehung des Spaltes im Uhrzeigersinne. (Bei entgegengesetzter Drehung gilt die Figur spiegelbildlich). Als Ordinate ist aufgetragen der Spaltwinkel,

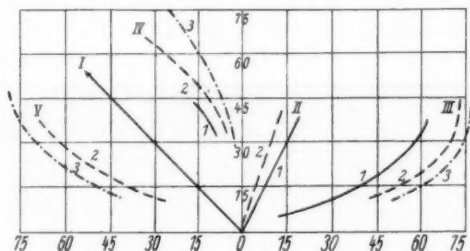


Fig. 8. Abhängigkeit der Streifenlage vom Spaltwinkel. Ordinate: Winkel zwischen Spalt und Gitterstrichen. Abszisse: Winkel zwischen Streifen und Gitterstrichen. Römische Ziffern: Streifenarten. Arabische Ziffern: Ordnungszahlen der Spektren

als Abszisse der Winkel, den die Streifenart mit der Richtung der Gitterstriche bildet; und zwar finden sich im rechten Quadranten jene Streifenarten, die sich im gleichen Sinne wie der Spalt drehen, im linken Quadranten die Streifen umgekehrten Drehsinnes.

Die Sorte I, die genau dem Ansatz für die Streifenzahl (S. 470) gehorcht, ist die in Fig. 6 etwa senkrecht zur Spaltrichtung liegende Streifenart. Sie dreht sich bei allmählicher Zunahme des Spaltwinkels um den gleichen Betrag im entgegengesetzten Sinne und behält in allen Ordnungen die gleiche Richtung. Sie wird in Fig. 8 durch eine einzige Gerade für alle Ordnungen dargestellt, die in der linken Hälfte unter 45° in den Nullpunkt einmündet.

Die Sorte II (auch auf Fig. 6 sichtbar) besteht aus engen Streifen, deren Drehsinn dem des Spaltes gleich ist. Sie ist bei Drehwinkeln von etwa $3-45^\circ$ sichtbar, ihre Neigung ist geringer als die jeweilige des Spaltes und nimmt mit der Ordnungszahl des Spektrums ab. Auch ihr Streifenabstand wird in höheren Ordnungen kleiner. In Fig. 8 sind die verschiedenen Ordnungen der gleichen Sorte durch die Art der Linienführung und durch arabische Ziffern gekennzeichnet.

Die andern drei Sorten zeigen meist größere Streifenabstände und sind von uns nicht bei allen Spaltwinkeln beobachtet worden.

Ihre Neigungen und ihr Drehsinn sind aus der Fig. 8 ablesbar. Ob alle diese Sorten reellen Intensitätsunterschieden entsprechen, oder ob sie zum Teil nur vorgetäuscht sind, läßt sich ohne genaue photometrische Durchmessung nicht sicher entscheiden¹⁾.

Zwei gleiche optische Kreuzgitter ergeben auch Systeme dunkler Streifen, die wir jedoch nicht näher untersucht haben.

Läßt man das Licht, das zwei Gitter in gegebener Entfernung durchsetzt hat, nach Spiegelung dieselben Gitter noch einmal durchlaufen — ersetzt man also in Fig. 1 den Trog durch zwei



Fig. 9. Erstes Spektrum nach Durchgang durch 4 Gitter (2 Strichgitter mit Spiegel). Weißes Licht. Spalt 45°

gleiche Strichgitter —, dann erhält man, wie Fig. 9, eine Aufnahme der Erscheinung im ersten Spektrum weißen Lichtes, zeigt, ein recht kompliziertes Streifensystem. Es gibt jedes Gitter entsprechend seinem Abstände von dem Spiegel dunkle Streifen (im Bilde diejenigen kleinen Abstandes) und außerdem sind noch Streifen da, deren Abstand von der gegenseitigen Entfernung der beiden Gitter abhängt (im Bilde die Streifen großen Abstandes).

1) Bei den akustischen Gittern konnten wir nur 2 dieser Streifenarten feststellen; das kann mit der räumlichen Tiefe dieser Gitter zusammenhängen. Auch ein aus lochfreien Rasierklingen hergestelltes *tiefes* Gitter zeigte bei Spiegelung ähnliche dunkle Streifen. Es liefert auch, wie nebenbei erwähnt sei, im durchgehenden Lichte die sekundären Interferenzen E. Hiedemanns. Auch die bei akustischen Gittern beobachtete Intensitätsverteilung in den Spektren zeigt ein solches tiefes Gitter.

Sehr wesentlich ist für die Beobachtung der Streifen, daß die Gitter genau ausgerichtet sind. Wird das eine Gitter gegen das andere verdreht, so drehen sich die vom gedrehten herrührenden Streifen stärker (etwa doppelt so stark), als dem Drehwinkel entspricht. Auch hier wieder bleiben also die Streifen mit der Gitterstrichlage verknüpft.

Ob E. P. Tawil bei seinen Untersuchungen¹⁾ über die in Luft von Ultraschallwellen erzeugten Schlieren ähnliche Streifen gesehen hat, läßt sich aus dem Text seiner Arbeit nicht mit Bestimmtheit entnehmen. Jedenfalls hat er keine Debye-Sears-Spektren gehabt. Die in seinen Aufnahmen wiedergegebenen Streifen dürften mit den von R. Pohlman²⁾ beobachteten identisch sein.

Zusammenfassung

Wenn Licht durch zwei gleiche Gitter dringt, so entstehen in den Spektren dunkle Streifen, deren Abstand proportional ist der Gitterkonstanten und umgekehrt proportional der Entfernung der Gitter und der Ordnungszahl der Spektren. Es ist gleichgültig, ob dabei optische Strichgitter oder akustische Wellengitter benutzt werden, auch kann das zweite Gitter durch Spiegelung des ersten erzeugt werden. Es werden die Beobachtungen in einfarbigem und weißem Lichte bei verschiedenen Lagen des Beleuchtungsspaltes beschrieben.

Wir möchten danken für die Unterstützung durch die Helmholtzgesellschaft, durch die Leitzwerke - Wetzlar und die Firma Dr. Steeg und Reuter-Bad Homburg.

1) E. P. Tawil, *Compt. rend.* **191**. S. 998. 1930.

2) R. Pohlman, a. a. O.

Gießen, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 22. März 1936)

Der Einfluß eines Magnetfeldes auf Wärmeleitung und Reibung in paramagnetischen Gasen. II

Von **M. v. Laue**

In meine Untersuchung, die vor einem Jahre unter dem gleichen Titel erschienen ist¹⁾, und zwar in ihren gastheoretischen Teil, haben sich mehrere Ungenauigkeiten eingeschlichen, die ich hier richtig stellen möchte, obwohl das frühere Ergebnis in allem Wesentlichen unverändert bleibt.

I.

Das erste Versehen liegt schon in der Benutzung der aus einem Vortrage Sommerfelds²⁾ übernommenen Gl. (16). Herr Sommerfeld selbst machte mich kürzlich auf deren Unvollständigkeit aufmerksam und bat mich, die Sache bei dieser Gelegenheit zu berichtigen. Die Ableitung seiner Gleichung übersieht nämlich eine Ursache des Transportes der Größe G . Abgesehen von den in Rechnung gesetzten Ursachen bewirkt noch die Veränderlichkeit der Verteilungsfunktion F mit dem Orte, verbunden mit der Bewegung der Atome, einen Transport durch die zum Gradienten von F senkrechte Fläche $d\sigma$. Bezeichnet, wie in Sommerfelds Vortrag, $d\Sigma$ das Volumenelement im Geschwindigkeitsraum, und ξ die Geschwindigkeitskomponente in der zu $d\sigma$ senkrechten x -Richtung, so beträgt dieser Transport in der Zeit dt für alle aus $d\Sigma$ auf $d\sigma$ treffenden Atome

$$G \xi \frac{\partial F}{\partial x} d\Sigma dt.$$

Denn es ist nicht so, wie Sommerfeld a. a. O. (S. 149 unten) annimmt, daß im stationären Zustand gleichviel Moleküle auf der Strecke dl durch Zusammenstöße einerseits aus ihrer anfangs nach $d\sigma$

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. [5] **23**, S. 1, 1935. Die Bezeichnungen dieser Arbeit behalten wir hier bei, die Numerierung der Gleichungen setzen wir fort. Wir bezeichnen jedoch die Boltzmannsche Konstante hier mit κ , um die Verwechslung mit der Reibungskonstanten k der Gl. (10) und (11) zu vermeiden.

2) A. Sommerfeld, Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität gehalten in Göttingen. Leipzig und Berlin 1914. S. 125 ff.

hinzielenden Bahn geworfen werden und andererseits in die passende Richtung hineinkommen; vielmehr gibt es unabhängig von allen Zusammenstößen einen Molekülfluß von der Stärke

$$\xi \frac{\partial F}{\partial x} d\Sigma dt$$

durch $d\sigma$, der bei der Berechnung des Transportes ebenfalls zu berücksichtigen ist.

Dies bedingt eine Ergänzung an seiner Gl. (3c), die mit unserer Gl. (16) identisch ist; sie muß lauten:

$$(16') \quad \left\{ \begin{aligned} -\mathfrak{G} &= \int_0^\infty dl \int_0^\pi \sin \Theta \cos \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{F G}{\lambda} e^{-\frac{l}{\lambda}} v^3 dv \\ &+ \int_0^\infty dl \int_0^\pi \sin \Theta \cos^2 \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty G \frac{\partial F}{\partial x} v^3 dv. \end{aligned} \right.$$

Der neue Summand hat nun mit der freien Weglänge nichts zu tun, wird also auch von einer Veränderung dieser Strecke durch das Magnetfeld nicht betroffen; alle Rechnungen in der genannten Arbeit, die sich auf die Folgen einer solchen Veränderung für Reibung und Wärmeleitung beziehen, bleiben also von dieser Berichtigung unberührt.

II.

Anders steht es mit Rechenfehlern in meiner Untersuchung, auf welche mich Herr A. Kratzer brieflich aufmerksam machte. In Gl. (22a) muß der zweite Summand das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten; es muß heißen:

$$(22a) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi f \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta &= \int_{-1}^{+1} f(x) x^2 dx = \int_{-1}^{+1} f(x) \left(\frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \frac{4}{15} c_2 + \frac{2}{3} c_0. \end{aligned} \right.$$

Dies Versehen pflanzt sich leider fort; so sind die folgenden Änderungen vorzunehmen:

$$(22b) \quad \int_0^\pi f \sin^3 \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^{+1} f(x) (1 - x^2) dx = \frac{4}{3} c_0 - \frac{4}{15} c_2,$$

$$(24) \quad -\mathfrak{G}^* = \frac{4\pi}{3} \left[\frac{2}{5} c_2 + c_0 - \frac{3}{5} c_2 \sin^2 \alpha \right] \int_0^\infty dl \int_0^\infty \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 v^3 dv,$$

1) Die „homogene Integralgleichung“ Gl. (17) auf S. 165 läßt sich aus demselben Grunde nicht aufrechterhalten, worauf zuerst Herr Enskog Herrn Sommerfeld aufmerksam gemacht hat.

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int f \cos \Theta \sin \Theta \cos \varphi d\Omega \\ &= 2\pi \cos \beta \sin \beta \left(\int_0^\pi f \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta - \frac{1}{2} \int_0^\pi f \sin^3 \vartheta d\vartheta \right) \\ &= \frac{4\pi}{5} c_2 \cos \beta \sin \beta, \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad -\mathcal{G}_\perp = \frac{4\pi}{5} c_2 \cos \alpha \sin \alpha \int_0^\infty l dl \int_0^\infty \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 v^3 dv,$$

$$(33) \quad \Delta K_\parallel = 2\pi n \left(\frac{2\pi T}{\pi m} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{2}{5} c_2 + c_0 - \frac{3}{5} c_2 \sin^2 \alpha \right).$$

Dies hat auf die Gastheorie der magnetischen Beeinflussung der Wärmeleitung sonst keinen Einfluß; insbesondere bleibt die Übereinstimmung zwischen den Faktoren von $\sin^2 \alpha$ in (24) und von $\cos \alpha \sin \alpha$ in (28) erhalten, auf die man Wert zu legen hat.

III.

Bei der Theorie der Reibung jedoch, wie sie die angeführte Arbeit gab, beruht die am Schluß erwähnte Unstimmigkeit, welche ich früher den unvermeidlichen Vernachlässigungen jeder derartigen Berechnung zuschrieb, ebenfalls auf einem Rechenfehler. Auch darauf machte mich Herr Kratzer aufmerksam. Die Einführung der Koeffizienten c_{2n} in das Richtungsintegral der Gl. (37) ist mißglückt; dies hat tatsächlich den Wert

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= \int f \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi d\Omega = \pi \int_0^\pi f (\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \cdot \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \pi R_1 \end{aligned} \right.$$

mit

$$(39) \quad R_1 = -\frac{16}{5 \cdot 7 \cdot 9} c_4 + \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} c_2 + \frac{4}{3 \cdot 5} c_0.$$

Daneben steht in (37) als Faktor das Integral

$$(40) \quad \int_0^\infty \left(\frac{l}{\lambda_m} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{l}{\lambda_m}} \frac{l dl}{\lambda_m^2} = 1,$$

sowie

$$(41) \quad \int_0^\infty F_m v^5 dv = n \left(\frac{m}{2\pi \kappa T} \right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2\kappa T}} v^5 dv = n \left(\frac{2\pi T}{\pi m} \right)^{1/2}.$$

Die letzte Berechnung benutzt Gl. (30). Danach wird aus (37):

$$(42) \quad \mathfrak{G}^* = 2n \sqrt{\frac{2m\pi T}{\pi}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 R_1.$$

Nun gibt (vgl. Anm. 1 auf S. 8 der früheren Arbeit) \mathfrak{G}^* den in der negativen x_3 -Richtung durch ein dazu senkrecht Flächenstück von der Größe 1 durchtretenden Impuls, hingegen

$$T_{13} = -\frac{1}{2} \eta_{1313} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

den in der positiven x_3 -Richtung übertragenen. Folglich wird

$$(43) \quad \Delta \eta_{1313} = 4n \sqrt{\frac{2}{\pi}} m\pi T R_1.$$

Dieser Betrag tritt im Magnetfeld zu dem gewöhnlichen Werte (vgl. 11)

$$\eta_{1313}^{(0)} = 2k$$

additiv hinzu.

Wenn wir nun denselben Reibungskoeffizienten unter der Annahme einer nach x_1 veränderlichen Strömung u_3 , also nach der Gleichung

$$T_{13} = -\frac{1}{2} \eta_{1313} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

berechnen, so haben wir das Flächenstück $d\sigma$ senkrecht zu x_1 zu verlegen. In dem mit ihm fest verbundenen Achsenkreuz x, y, z fällt dann x mit x_1 zusammen, wir wählen ferner $y = x_2$ und $z = x_3$. Dann wird der Impuls in der z -Richtung

$$(44) \quad G = mv \sin \Theta \sin \varphi.$$

Für die Verteilungsfunktion ist als Näherungswert zu setzen:

$$(45) \quad F = F_m \left(1 + \frac{mv_3 w}{\pi T} \right).$$

Die z -Komponente von v wird

$$(46) \quad v_3 = v \sin \Theta \sin \varphi$$

und die Reihenentwicklung für w als Funktion des Ortes lautet:

$$w = w_0 + l \cos \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

An die Stelle von (37) tritt dann eine Gleichung, die sich von ihr nur darin unterscheidet, daß $\partial u / \partial x$ durch $\partial w / \partial x$ und das Richtungsintegral J_1 ersetzt ist durch

$$J_2 = \int f \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi d\Omega.$$

Nun ist bei der jetzigen Lage der beiden Achsenkreuze

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \Theta \sin \varphi = \cos \vartheta, \quad \cos \Theta = \sin \vartheta \cos \psi, \\ \sin \Theta \cos \varphi = \sin \vartheta \sin \psi; \end{array} \right.$$

folglich wird im Hinblick auf (38)

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_2 = \int f \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \cos^2 \psi \, d\Omega \\ = \pi \int_0^\pi f (\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = J_1. \end{array} \right.$$

Beide Berechnungen von η_{1313} führen also zu gleichem Ergebnis (43). Dies kann zur Ermittlung auch der beiden anderen Komponenten η_{1111} und η_{1212} ermutigen.

Zur Auswertung von η_{1111} behalten wir die Lage von $d\sigma$ und seines Achsenkreuzes x, y, z bei. Da es durch die Gleichung

$$(48a) \quad T_{11} = -\eta_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

definiert ist, müssen wir nun die x -Komponente des Impulses im Betrage

$$(49) \quad G = m v \cos \Theta$$

eingeführen, für F den Näherungswert

$$(50) \quad F = F_m \left(1 + \frac{m v_1 u}{x T} \right)$$

benutzen, in welchem

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v \cos \Theta \\ u = u_0 + l \cos \Theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \end{array} \right.$$

zu setzen ist. Dies ergibt für den durch $d\sigma$ in der negativen x_1 -Richtung wandernden Impuls \mathfrak{G}^* :

$$(51a) \quad -\mathfrak{G}^* = \frac{m^2}{x T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 J_3 \int_0^\infty l \, dl \int_0^\infty \dots \, dv$$

mit dem Richtungsintegral

$$J_3 = \int f \cos^4 \Theta \, d\Omega.$$

Nach (47) wird daraus:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_3 = \int f \sin^4 \vartheta \cos^4 \psi \, d\Omega \\ = \frac{3}{4} \pi \int_0^\pi f \sin^4 \vartheta \, d\vartheta = \frac{3}{4} \pi \int_{-1}^{+1} f (1-x^2)^2 \, dx = \pi R_3 \end{array} \right.$$

mit

$$(53) \quad R_3 = \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} c_4 - \frac{8}{5 \cdot 7} c_2 + \frac{4}{5} c_0.$$

Als Analogie zu (43) ergibt sich aus (48a) und (51a):

$$(54) \quad \Delta \eta_{1111} = 2n \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \kappa T \cdot R_3.$$

Dieser Zusatz tritt im Magnetfeld zu dem Normalwert [vgl. (10)]:

$$\eta_{1111}^{(0)} = \frac{4}{3} k$$

hinzu.

Auch bei der Berechnung von η_{1212} gemäß der Gleichung

$$(55) \quad T_{12} = -\frac{1}{2} \eta_{1212} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

können wir die bisherige Lage von $d\sigma$ und seines Achsenkreuzes beibehalten. Die y - (x_2 -)Komponente des Impulses hat den Betrag

$$(56) \quad G = m v \sin \Theta \cos \varphi,$$

für die Verteilungsfunktion gilt, wenn wir für die y -Komponente der makroskopischen Geschwindigkeit die Benennung u_2 behalten

$$(57) \quad F = F_m \left(1 + \frac{m v_2 u_2}{\kappa T} \right).$$

Ferner ist

$$(58) \quad \begin{cases} v_2 = v \sin \Theta \cos \varphi \\ u_2 = u_2^{(0)} + l \cos \Theta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_0. \end{cases}$$

Folglich tritt an die Stelle von (37):

$$(59) \quad -\mathfrak{G}^* = \frac{m^2}{\kappa T} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_0 J_4 \int_0^\infty l dl \int_0^\infty \dots dv$$

mit dem Richtungsintegral

$$J_4 = \int f \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi d\Omega = \int f \sin^4 \vartheta \cos^2 \psi \sin^2 \psi d\Omega$$

[nach (44)]. Die weitere Ausrechnung ergibt:

$$(60) \quad \begin{cases} J_4 = \frac{\pi}{4} \int_0^\pi f \sin^5 \vartheta d\vartheta = \pi R_4, \\ R_4 = \frac{1}{3} R_3. \end{cases}$$

Aus (55) und (59) folgt schließlich für den Zusatz, der im Magnetfeld zum Normalwert [vgl. (11)]

$$\eta_{1212}^{(0)} = 2k$$

hinzukommt:

$$(61) \quad \Delta \eta_{1212} = 4n \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \kappa T R_4.$$

Die hier nicht behandelten Komponenten des zusätzlichen Reibungstensors $\Delta \eta_{iklm}$ lassen sich nach (9) aus den hier berechneten ableiten. In ihnen allen treten von den Koeffizienten der Entwicklung (15) c_0 , c_2 und c_4 auf, während bei dem zusätzlichen Wärmeleitungskoeffizienten nach (33) nur c_0 und c_2 in die Erscheinung treten.

Leider sind damit die inneren Unstimmigkeiten dieser Berechnung keineswegs beseitigt. Setzt man nämlich alle Koeffizienten c_{2n} der Reihe (15) bis auf c_0 gleich Null, so bleibt das Gas ja isotrop, und man muß fordern, daß sich alle $\Delta \eta_{iklm}$ durch eine Veränderung Δk des Reibungskoeffizienten k ausdrücken lassen. Es sollte also nach (10) und (11) gelten:

$$\Delta \eta_{1212} : \Delta \eta_{1313} : \Delta \eta_{1111} = 1 : 1 : \frac{2}{3}.$$

Nach den Gl. (43), (54) und (61) (mit $c_2 = c_4 = 0$) ist statt dessen:

$$\Delta \eta_{1212} : \Delta \eta_{1313} : \Delta \eta_{1111} = 1 : 1 : \frac{3}{2}.$$

Dies rührt sicherlich von dem unvermeidlich ungenauen Ansatz für die Verteilungsfunktion F her.

Wir kommen also über das frühere Ergebnis nicht hinaus: Es treten bei der Berechnung der durch das Magnetfeld veränderten inneren Reibung höhere Koeffizienten der Reihe (15) auf, als bei der Ermittlung der veränderten Wärmeleitung. Man versteht insofern, warum die bisherigen Versuche keinen Zusammenhang zwischen beiden Änderungen erkennen lassen. Aber sonst sind diese Betrachtungen nur mit erheblichen Vorbehalten zu benutzen.

Berlin-Zehlendorf, Albertinerstr. 17.

(Eingegangen 17. April 1936)